Индекс 70465

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

№6/2010

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЖУРНАЛУ КВАНТ

Приложение к журналу

КВАНТ

№6/2010

Экзаменационные материалы 2010 года

БЮРО КВАНТУМ

Приложение к журналу

«КВАНТ+»

№6/2010

Экзаменационные материалы по математике и физике 2010 года

Составители
С.А.Дориченко, А.А.Егоров,
В.А.Тихомирова

Москва
2011

УДК 373.167.1:[51+53]
ББК 22.1я721+22.3я721
Э36

Приложение
к журналу «Квант$^{+}$»
№6/2010

Э36 **Экзаменационные материалы по математике и физике 2010 года**/Составители С.А.Дориченко, А.А.Егоров, В.А.Тихомирова. – М., 2011. – 192 с. (Приложение к журналу «Квант$^{+}$» №6/2010.)

ISBN 978-5-85843-110-7

В книгу включены варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ) по физике, задачи олимпиад и материалы вступительных экзаменов по математике и физике в различные вузы страны в 2010 году.

Книга адресована выпускникам средних школ, лицеев и гимназий, слушателям подготовительных отделений и курсов, а также всем тем, кто самостоятельно готовится к поступлению в вуз.

ББК 22.1я721+22.3я721

ISBN 978-5-85843-110-7

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом приложении к журналу «Квант» традиционно собраны материалы вступительных испытаний по математике и физике в вузы нашей страны за прошедший 2010 год.

Мы предлагаем школьникам и учителям как избранные варианты единого государственного экзамена (ЕГЭ), так и задачи различных олимпиад, имеющих статус «вступительных». Победители и призеры таких олимпиад, включенных в федеральный список данного года, имеют право быть приравненными к лицам, набравшим максимальное количество баллов по единому государственному экзамену по конкретному предмету, при поступлении в любой вуз. (Отметим, что это не освобождает учащихся от сдачи ЕГЭ.) Кроме того, в сборнике представлены материалы вступительных испытаний в традиционной форме, в которых, в частности, могут участвовать абитуриенты, по каким-либо причинам освобожденные от сдачи ЕГЭ.

Мы надеемся, что предлагаемые вашему вниманию материалы будут полезны как для самостоятельной подготовки к экзаменам, так и для использования на уроках, факультативах, кружках, подготовительных курсах.

Желаем успехов!

ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ

Варианты ЕГЭ по физике 2011 года будут несколько отличаться по структуре от вариантов 2010 года. Группа В не будет содержать ни одной задачи с кратким ответом. Она будет состоять из четырех задач в форме тестов из двух или трех вопросов, на каждый из которых требуется выбрать правильный ответ из нескольких предложенных (как В1 и В2 в вариантах 2010 года). За такую задачу можно получить 2 первичных балла, если все ответы правильные, и один балл, если только один ответ неправильный. Напомним, что все задачи группы А оцениваются в 1 балл, а задачи группы С – максимум в 3 балла. Кроме того, экзамен по физике будет длиться не 210 минут, а 240 минут (как экзамен по математике).

Для помощи в подготовке к экзамену мы предлагаем вам два варианта из открытого сегмента вариантов 2010 года с ответами и решениями избранных задач. Первый вариант мы приводим полностью, со всеми таблицами и указаниями по оформлению, а второй вариант даем в сокращенном виде – только условия задач (таблицы и указания можно взять из первого варианта). Кроме того, мы предлагаем вам дополнительно несколько задач с тестами из нескольких вопросов из открытого сегмента 2009 и 2010 годов.

Вариант 1

Инструкция по выполнению работы

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 3,5 часа (210 минут). Работа состоит из 3 частей, включающих 36 заданий.

Часть 1 содержит 25 заданий (А1–А25). К каждому заданию дается 4 варианта ответа, из которых правильный только один.

Часть 2 содержит 5 заданий (В1–В5), на которые следует дать краткий ответ. Для заданий В1 и В2 ответ необходимо записать в виде набора цифр, а для заданий В3–В5 – в виде числа.

Часть 3 состоит из 6 задач (С1–С6), для которых требуется дать развернутые решения.

При выполнении заданий В3–В5 части 2 значение искомой величины следует выразить в тех единицах физических величин, которые указаны в условии задания. Если такого указания нет, то значение величины следует записать в Международной системе единиц (СИ). При вычислении разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Внимательно прочитайте каждое задание и предлагаемые варианты ответа, если они имеются. Отвечайте только после того, как вы поняли вопрос и проанализировали все варианты ответа.

Выполняйте задания в том порядке, в котором они даны. Если какое-то задание вызывает у вас затруднение, пропустите его. К пропущенным заданиям можно будет вернуться, если у вас останется время.

За выполнение различных по сложности заданий дается один или более баллов. Баллы, полученные вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ниже приведены справочные данные, которые могут понадобиться вам при выполнении работы.

Десятичные приставки

Наименование	**Обозначение**	**Множитель**	**Наименование**	**Обозначение**	**Множитель**
гига	Г	10^9	санти	с	10^{-2}
мега	М	10^6	милли	м	10^{-3}
кило	к	10^3	микро	мк	10^{-6}
гекто	г	10^2	нано	н	10^{-9}
деци	д	10^{-1}	пико	п	10^{-12}

Константы

число π	$\pi = 3{,}14$
ускорение свободного падения на Земле	$g = 10$ м/с^2
гравитационная постоянная	$G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н · м^2/кг^2
универсальная газовая постоянная	$R = 8{,}31$ Дж/(моль · К)
постоянная Больцмана	$k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
постоянная Авогадро	$N_А = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
скорость света в вакууме	$c = 3 \cdot 10^8$ м/с

коэффициент пропорциональности в законе Кулона	$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ Н · м²/Кл²
модуль заряда электрона (элементарный электрический заряд)	$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
постоянная Планка	$h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с

Соотношение между различными единицами

температура	0 К = − 273 °C
атомная единица массы	1 а.е.м. = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ кг
1 атомная единица массы эквивалентна	931,5 МэВ
1 электронвольт	1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж

Масса частиц

электрона	$9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг ≈ $5{,}5 \cdot 10^{-4}$ а.е.м.
протона	$1{,}673 \cdot 10^{-27}$ кг ≈ 1,007 а.е.м.
нейтрона	$1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг ≈ 1,008 а.е.м.

Плотность

воды	1000 кг/м³	подсолнечного масла	900 кг/м³
древесины (сосна)	400 кг/м³	алюминия	2700 кг/м³
керосина	800 кг/м³	железа	7800 кг/м³
ртути	13600 кг/м³		

Удельная теплоемкость

воды	$4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)	алюминия	900 Дж/(кг · К)
льда	$2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К)	меди	380 Дж/(кг · К)
железа	460 Дж/(кг · К)	чугуна	500 Дж/(кг · К)
свинца	130 Дж/(кг · К)		

Удельная теплота

парообразования воды	$2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг
плавления свинца	$2{,}5 \cdot 10^4$ Дж/кг
плавления льда	$3{,}3 \cdot 10^5$ Дж/кг

Нормальные условия: давление 10^5 Па, температура 0 °C

Молярная масса

азота	$28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	кислорода	$32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
аргона	$40 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	лития	$6 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

водорода	$2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	молибдена	$96 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
воздуха	$29 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	неона	$20 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
гелия	$4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль	углекислого газа	$44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

Часть 1

При выполнении заданий части 1 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого вами задания (А1–А25) поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Четыре тела двигались по оси $0x$. В таблице представлена зависимость их координат от времени:

t, с	0	1	2	3	4	5
x_1, м	0	2	4	6	8	10
x_2, м	0	0	0	0	0	0
x_3, м	0	1	4	9	16	25
x_4, м	0	2	0	−2	0	2

У какого из тел скорость могла быть постоянна и отлична от нуля?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

А2. Шарик движется по окружности радиусом r со скоростью v. Как изменится его центростремительное ускорение, если радиус окружности увеличить в 3 раза, оставив скорость шарика прежней?

1) Увеличится в 3 раза; 2) уменьшится в 3 раза; 3) увеличится в 9 раз; 4) уменьшится в 9 раз.

А3. У поверхности Луны на космонавта действует сила тяготения 120 Н. Какая сила тяготения действует со стороны Луны на того же космонавта в космическом корабле, движущемся по круговой орбите вокруг Луны на расстоянии трех лунных радиусов от ее центра?

1) 0; 2) 39 Н; 3) 21 Н; 4) 13 Н.

А4. Шары движутся со скоростями, показанными на рисунке 1, и сталкиваются. Как будет направлен суммарный импульс шаров после столкновения, если удар абсолютно упругий?

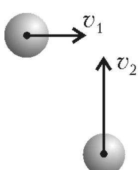


Рис. 1

1) →; 2) ↘; 3) ↗; 4) ↑.

А5. Мальчик столкнул санки с вершины горки. Сразу после толчка санки имели скорость 5 м/с, а у подножия горки она равнялась 15 м/с. Трение санок о снег пренебрежимо мало. Какова высота горки?

1) 7,5 м; 2) 10 м; 3) 15 м; 4) 20 м.

А6. Мужской голос баритон занимает частотный интервал от $\nu_1 = 100$ Гц до $\nu_2 = 400$ Гц. Отношение длин звуковых волн λ_1/λ_2, соответствующих границам этого интервала, равно:

1) 0,5; 2) $\sqrt{2}$; 3) 0,25; 4) 4.

А7. Автомобиль, двигаясь по горизонтальной дороге, совершает поворот по дуге окружности. Каков минимальный радиус этой окружности при коэффициенте трения автомобильных шин о дорогу 0,4 и скорости автомобиля 10 м/с?

1) 25 м; 2) 50 м; 3) 100 м; 4) 250 м.

А8. В результате охлаждения идеального газа средняя кинетическая энергия теплового движения его молекул уменьшилась в 3 раза. Абсолютная температура газа при этом:

1) увеличилась в 3 раза; 2) уменьшилась в $\sqrt{3}$ раз; 3) увеличилась в $\sqrt{3}$ раз; 4) уменьшилась в 3 раза.

А9. Один моль разреженного газа сначала изотермически сжимали, а затем изохорно нагревали. На каком из рисунков, представленных на рисунке 2, изображен график этих процессов?

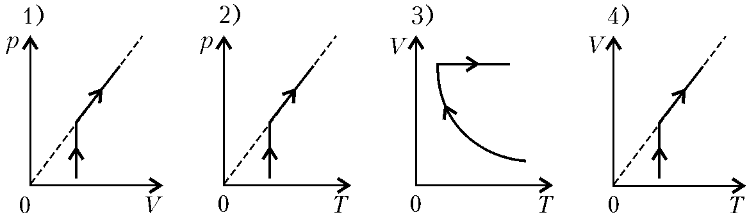


Рис. 2

А10. Вода может испаряться:

1) только при кипении;

2) только при нагревании;

3) при любой температуре, если пар в воздухе над поверхностью воды является ненасыщенным;

4) при любой температуре, если пар в воздухе над поверхностью воды является насыщенным.

А11. Газ совершил работу 10 Дж и получил количество теплоты 6 Дж. Внутренняя энергия газа:

1) увеличилась на 16 Дж; 2) уменьшилась на 16 Дж; 3) увеличилась на 4 Дж; 4) уменьшилась на 4 Дж.

А12. В кубическом метре воздуха в помещении при температуре 20 °С находится $1{,}12 \cdot 10^{-2}$ кг водяных паров. Пользуясь таблицей плотности насыщенных паров воды, определите относительную влажность воздуха.

t, °C	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
ρ, ×10^{-2} кг/м^3	1,36	1,45	1,54	1,63	1,73	1,83	1,94	2,06	2,18	2,30

1) 100%; 2) 75%; 3) 65%; 4) 55%.

А13. Два точечных электрических заряда действуют друг на друга с силами 9 мкН. Какими станут силы взаимодействия между ними, если, не меняя расстояние между зарядами, увеличить модуль каждого из них в 3 раза?

1) 1 мкН; 2) 3 мкН; 3) 27 мкН; 4) 81 мкН.

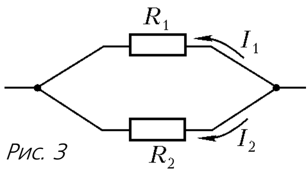


Рис. 3

А14. Два резистора включены в электрическую цепь параллельно, как показано на рисунке 3. Значения силы тока в резисторах I_1 = 0,8 А, I_2 = 0,2 А. Для сопротивлений резисторов справедливо соотношение:

1) $R_1 = \frac{1}{4}R_2$; 2) $R_1 = 4R_2$; 3) $R_1 = \frac{1}{2}R_2$; 4) $R_1 = 2R_2$.

А15. С использованием основного закона электромагнитной индукции ($\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$) можно объяснить:

1) взаимодействие двух параллельных проводов, по которым идет ток;

2) отклонение магнитной стрелки, расположенной вблизи проводника с током параллельно ему;

3) возникновение электрического тока в замкнутой катушке при увеличении силы тока в другой катушке, находящейся рядом с ней;

4) возникновение силы, действующей на проводник с током в магнитном поле.

А16. Напряжение на клеммах конденсатора в колебательном контуре меняется с течением времени согласно графику на рисунке 4. Какое преобразование энергии происходит в контуре в промежутке от $2 \cdot 10^{-3}$ с до $3 \cdot 10^{-3}$ с?

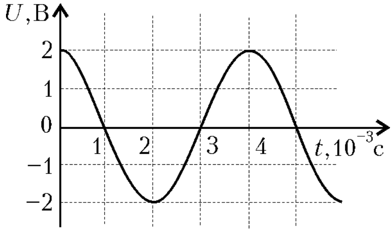


Рис. 4

1) Энергия магнитного поля катушки уменьшается от максимального значения до 0;

2) энергия магнитного поля катушки преобразуется в энергию электрического поля конденсатора;

3) энергия электрического поля конденсатора увеличивается до максимального значения;

4) энергия электрического поля конденсатора преобразуется в энергию магнитного поля катушки.

A17. На рисунке 5 показан ход светового луча сквозь стеклянную призму, находящуюся в воздухе. Если точка O − центр окружности, то показатель преломления стекла n определяется отношением длин отрезков:

1) $\frac{CD}{AB}$; 2) $\frac{AB}{CD}$;

3) $\frac{OB}{OD}$; 4) $\frac{OD}{OB}$.

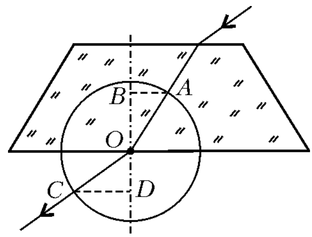


Рис. 5

A18. В инерциальной системе отсчета свет от неподвижного источника распространяется со скоростью c. Если источник света и зеркало движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю скоростями v (рис.6), то скорость отраженного света в инерциальной системе отсчета, связанной с источником, равна:

1) $c - 2v$; 2) c;

3) $c + 2v$; 4) $c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

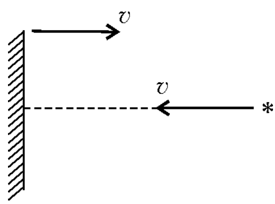


Рис. 6

A19. Две частицы, имеющие отношения зарядов $q_2/q_1 = 2$ и масс $m_2/m_1 = 4$, движутся в однородном электрическом поле. Начальная скорость у обеих частиц равна нулю. Определите отношение кинетических энергий этих частиц W_2/W_1 в один и тот же момент времени после начала движения.

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 4.

A20. Атом бора $^{8}_{5}$B содержит:

1) 8 протонов, 5 нейтронов и 13 электронов;

2) 8 протонов, 13 нейтронов и 8 электронов;

3) 5 протонов, 3 нейтрона и 5 электронов;

4) 5 протонов, 8 нейтронов и 13 электронов.

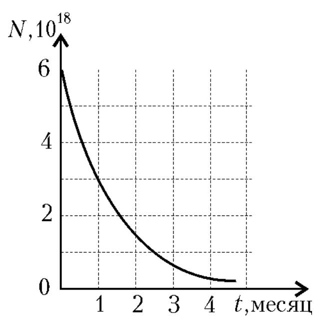


Рис. 7

A21. Дан график изменения числа ядер находящегося в пробирке радиоактивного изотопа с течением времени (рис.7). Период полураспада этого изотопа равен:

1) 1 месяц; 2) 2 месяца; 3) 3 месяца; 4) 4 месяца.

А22. Радиоактивный полоний $^{216}_{84}Po$, испытав один α-распад и два β-распада, превратился в изотоп:

1) свинца $^{212}_{82}Pb$; 2) полония $^{212}_{84}Po$; 3) висмута $^{212}_{83}Bi$; 4) таллия $^{208}_{81}Tl$.

А23. В опытах по фотоэффекту взяли пластину из металла с работой выхода 3,5 эВ и стали освещать ее светом частотой $3 \cdot 10^{15}$ Гц. Затем частоту падающей на пластину световой волны уменьшили в 4 раза, увеличив в 2 раза интенсивность светового пучка. В результате этого число фотоэлектронов, покидающих пластину за 1 с:

1) осталось приблизительно таким же;
2) уменьшилось в 2 раза;
3) оказалось равным нулю;
4) уменьшилось в 4 раза.

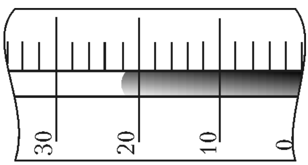


Рис. 8

А24. На рисунке 8 показана часть шкалы комнатного термометра. Определите абсолютную температуру воздуха в комнате.

1) 21 °С; 2) 22 °С;
3) 275 К; 4) 295 К.

А25. При проведении эксперимента ученик исследовал зависимость модуля силы упругости пружины от длины пружины, которая выражается формулой $F(l) = k|l - l_0|$, где l_0 – длина пружины в недеформированном состоянии. График полученной зависимости приведен на рисунке 9. Какое(-ие) из утверждений соответствует(-ют) результатам опыта:

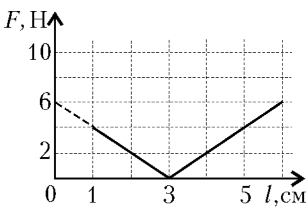


Рис. 9

А – длина пружины в недеформированном состоянии равна 7 см;

Б – жесткость пружины равна 200 Н/м?

1) Только А; 2) только Б; 3) и А, и Б; 4) ни А, ни Б.

Часть 2

Ответом к каждому из заданий В1–В2 будет некоторая последовательность цифр. Эту последовательность надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания без пробелов и других симво-

лов, начиная с первой клеточки. Каждую цифру пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами.

B1. В сосуде под поршнем находится идеальный газ. Если при нагревании газа его давление остается постоянным, то как изменятся величины: объем газа, его плотность и внутренняя энергия? Для каждой величины определите соответствующий характер ее изменения:

1) увеличилась;
2) уменьшилась;
3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Объем газа	Плотность газа	Внутренняя энергия газа

B2. Шарик брошен вертикально вверх с начальной скоростью $\vec{v}$ (рис.10). Установите соответствие между графиками (рис.11) и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут представлять (t_0 – время полета). К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

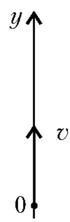


Рис. 10

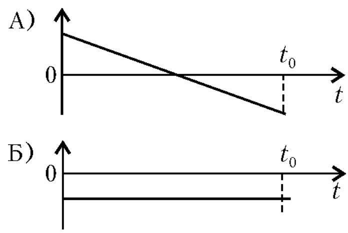


Рис. 11

ГРАФИКИ

А)
Б)

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

1) координата шарика
2) проекция скорости шарика
3) проекция ускорения шарика
4) модуль силы тяжести, действующей на шарик

А	Б

Ответом к каждому из заданий B3–B5 будет некоторое число. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ (цифру, запятую, знак

«минус») пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы физических величин писать не нужно.

В3. На последнем километре тормозного пути скорость поезда уменьшилась на 10 м/с. Определите скорость в начале торможения, если общий тормозной путь поезда составил 4 км, а торможение было равнозамедленным.

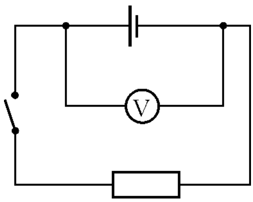


Рис. 12

В4. Идеальный одноатомный газ находится в сосуде объемом $1{,}2\,\text{м}^3$ под давлением $4\cdot10^3$ Па. Определите внутреннюю энергию этого газа. Ответ выразите в килоджоулях (кДж).

В5. Схема электрической цепи показана на рисунке 12. Внутреннее сопротивление источника тока 0,5 Ом, а сопротивление резистора 3,5 Ом. При замкнутой цепи идеальный вольтметр показывает 7 В. Какое значение напряжения показывает вольтметр при разомкнутой цепи?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Часть 3

Задания С1–С6 представляют собой задачи, полное решение которых необходимо записать в бланке ответов № 2. Рекомендуется провести предварительное решение на черновике. При оформлении решения в бланке ответов № 2 запишите сначала номер задания (С1 и т.д.), а затем – решение соответствующей задачи.

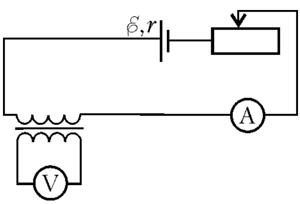


Рис. 13

С1. На рисунке 13 приведена электрическая цепь, состоящая из гальванического элемента, реостата, трансформатора, амперметра и вольтметра. В начальный момент времени ползунок реостата установлен посередине и неподвижен. Опираясь на законы электродинамики, объясните, как будут изменяться показания приборов в процессе перемещения ползунка реостата влево. ЭДС самоиндукции пренебречь по сравнению с $\mathcal{E}$.

Полное правильное решение каждой из задач С2–С6 должно включать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а

также математические преобразования, расчеты с численным ответом и, при необходимости, рисунок, поясняющий решение.

С2. При выполнении трюка «Летающий велосипедист» гонщик движется по трамплину под действием силы тяжести, начиная движение из состояния покоя с высоты H (рис.14). На краю трамплина скорость гонщика направлена под таким углом к горизонту, что дальность его полета максимальна. Пролетев по воздуху, гонщик приземляется на горизонтальный стол, находящийся на той же высоте, что и край трамплина. Какова высота полета h на этом трамплине? Сопротивлением воздуха и трением пренебречь.

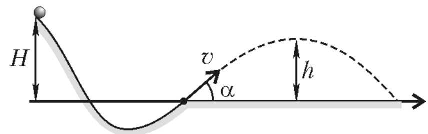


Рис. 14

С3. Сферическую оболочку воздушного шара делают из материала, квадратный метр которого имеет массу 1 кг. Шар наполняют гелием при атмосферном давлении 10^5 Па. Определите минимальную массу оболочки, при которой шар начнет поднимать сам себя. Температура гелия и окружающего воздуха одна и та же и равна $0\,^\circ\mathrm{C}$. (Площадь сферы $S = 4\pi r^2$, объем шара $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.)

С4. Полый шарик массой $m = 0{,}4$ г с зарядом $q = 8$ нКл движется в однородном горизонтальном электрическом поле из состояния покоя. Траектория шарика образует с вертикалью угол $\alpha = 45^\circ$. Чему равен модуль E напряженности электрического поля?

С5. Небольшой груз, подвешенный на нити длиной 2,5 м, совершает гармонические колебания, при которых его максимальная скорость достигает 0,2 м/с. При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием 0,2 м изображение колеблющегося груза проецируется на экран, расположенный на расстоянии 0,5 м от линзы. Главная оптическая ось линзы перпендикулярна плоскости колебаний маятника и плоскости экрана. Определите максимальное смещение изображения груза на экране от положения равновесия.

С6. Красная граница фотоэффекта для вещества фотокатода $\lambda_0 = 290$ нм. При облучении катода светом с длиной волны λ фототок прекращается при напряжении между анодом и катодом $U = 1{,}9$ В. Определите длину волны λ.

Вариант 2

Часть 1

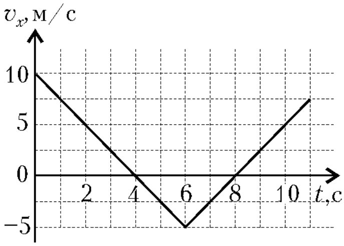


Рис. 15

А1. Тело движется по оси $0x$. По графику зависимости проекции скорости тела v_x от времени t (рис.15) установите, какой путь прошло тело за время от t_1 = = 4 с до t_2 = 8 с.

1) 10 м; 2) 15 м;
3) 45 м; 4) 20 м.

А2. На тело в инерциальной

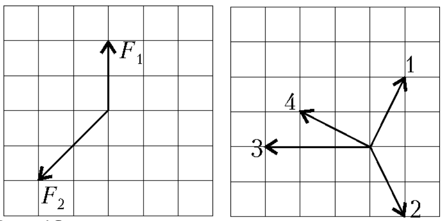


Рис. 16

системе отсчета действуют две силы (рис.16). Какой из векторов, изображенных на рисунке справа, правильно указывает направление ускорения тела в этой системе отсчета?

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

А3. Пружина жесткостью 10^4 Н/м под действием силы 1000 Н растянется на:

1) 1 м; 2) 1 см; 3) 10 см; 4) 1 мм.

А4. Два тела движутся по взаимно перпендикулярным пересекающимся прямым, как показано на рисунке 17. Модуль импульса первого тела $p_1 = 4\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$, а второго тела $p_2 = 3\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$. Чему равен модуль импульса системы этих тел после их абсолютно неупругого удара?

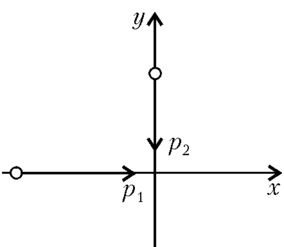


Рис. 17

1) $1\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; 2) $4\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$;
3) $5\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$; 4) $7\,\text{кг}\cdot\text{м/с}$.

А5. Ящик тянут по земле за веревку по горизонтальной окружности диаметром D = 20 м с постоянной по модулю скоростью. Работа силы тяги за один оборот по окружности равна A = 3,0 кДж. Чему равен модуль силы трения, действующей на ящик со стороны земли?

1) 150 Н; 2) 48 Н; 3) 24 Н; 4) 0.

А6. Звуковой сигнал, отразившись от препятствия, вернулся обратно к источнику через 5 с после его испускания. Каково расстояние от источника до препятствия, если скорость звука в воздухе 340 м/с?

1) 850 м; 2) 425 м;

3) 3400 м; 4) 1700 м.

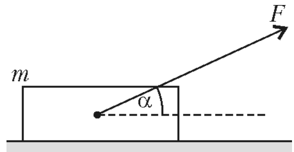


Рис. 18

А7. Массивный брусок движется поступательно по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы, направленной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис.18). Модуль этой силы F = 12 Н. Коэффициент трения между бруском и плоскостью μ = 0,2. Модуль силы трения, действующей на брусок, $F_{тр}$ = 2,8 Н. Чему равна масса бруска?

1) 1,4 кг; 2) 2,0 кг; 3) 2,4 кг; 4) 2,6 кг.

А8. В комнате в одном сосуде находится водород, а в другом – азот. Средние значения кинетической энергии поступательного теплового движения молекулы водорода и молекулы азота одинаковы в том случае, если у этих газов одинаковы значения:

1) температуры; 2) объема;

3) массы;

4) концентрации частиц.

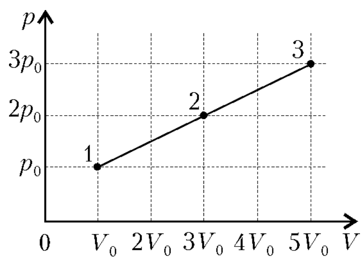


Рис. 19

А9. На рисунке 19 показан график процесса, проведенного над одним молем идеального газа. Найдите отношение температур T_2/T_1.

1) 6; 2) 5; 3) 3; 4) 15.

А10. Относительная влажность воздуха в цилиндре под поршнем равна 60%. Воздух изотермически сжали, уменьшив его объем в два раза. Относительная влажность воздуха стала:

1) 120%; 2) 100%; 3) 60%; 4) 30%.

А11. Четыре металлических бруска положили вплотную друг к другу, как показано на рисунке 20. Стрелки указывают направление теплопередачи от бруска к бруску. Температуры брусков в данный момент $100\,^\circ\mathrm{C}$, $80\,^\circ\mathrm{C}$, $60\,^\circ\mathrm{C}$, $40\,^\circ\mathrm{C}$. Температуру $60\,^\circ\mathrm{C}$ имеет брусок:

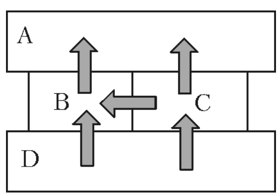


Рис. 20

1) A; 2) B; 3) C; 4) D.

А12. В процессе эксперимента внутренняя энергия газа увеличилась на 30 кДж, и он получил от нагревателя количество теплоты, равное 10 кДж. Следовательно, газ:

1) сжали, совершив работу 20 кДж;
2) сжали, совершив работу 40 кДж;
3) расширился, совершив работу 20 кДж;
4) расширился, совершив работу 40 кДж.

А13. Расстояние между двумя точечными электрическими зарядами увеличили в 3 раза, а один из зарядов уменьшили в 3 раза. Сила электрического взаимодействия между ними:

1) не изменилась;
2) уменьшилась в 3 раза;
3) увеличилась в 3 раза;
4) уменьшилась в 27 раз.

А14. На рисунке 21 приведена фотография электрической цепи, собранной учеником для исследования зависимости силы тока, проходящего через резистор, от напряжения на нем. Для того чтобы через резистор протекал ток силой 1 А, напряжение на нем должно быть равно:

1) 0,2 В; 2) 3,4 В; 3) 5,7 В; 4) 7,6 В.

А15. Прямолинейный проводник длиной L с током I помещен в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции $\vec{B}$. Как изменится сила Ампера, действующая на проводник, если силу тока уменьшить в 2 раза, а индукцию магнитного поля увеличить в 4 раза?

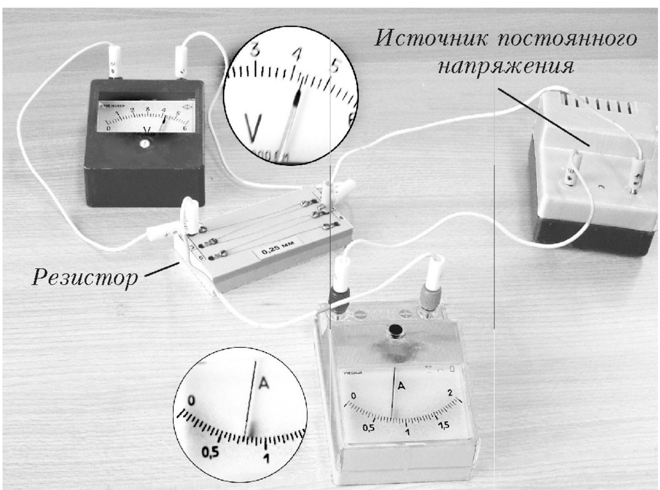


Рис. 21

1) Уменьшится в 4 раза;
2) уменьшится в 2 раза;
3) увеличится в 4 раза;
4) увеличится в 2 раза.

А16. В наборе радиодеталей для изготовления простого колебательного контура имеются две катушки с индуктивностями $L_1 = 1$ мкГн и $L_2 = 2$ мкГн, а также два конденсатора, емкости которых $C_1 = 3$ пФ и $C_2 = 4$ пФ. При каком выборе двух элементов из этого набора период T собственных колебаний контура будет наименьшим?

1) L_1 и C_1; 2) L_2 и C_2; 3) L_2 и C_1; 4) L_1 и C_2.

А17. Изображением точки S, которое дает тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием F (рис.22), является точка:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4.

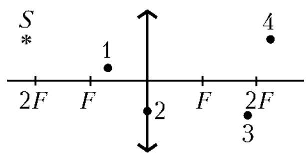


Рис. 22

А18. Два точечных источника света S_1 и S_2 находятся близко друг от друга и создают на удаленном экране Э устойчивую интерференционную картину (рис.23). Это возможно, если S_1 и S_2 — малые отверстия в непрозрачном экране, освещенные:

1) каждое своим солнечным зайчиком от зеркал в руках человека;

2) одно лампочкой накаливания, а второе горящей свечой;

3) одно синим светом, а другое красным светом;

4) светом от одного и того же точечного источника.

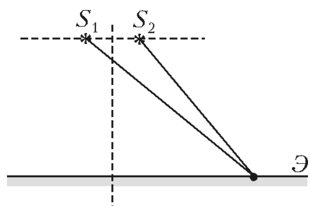


Рис. 23

А19. На рисунке 24 приведен график зависимости силы тока от времени в колебательном контуре, состоящем из последовательно соединенных конденсатора и катушки, индуктивность которой равна 0,2 Гн. Максимальное значение энергии магнитного поля катушки равно:

1) $2{,}5 \cdot 10^{-6}$ Дж;

2) $5 \cdot 10^{-6}$ Дж;

3) $5 \cdot 10^{-4}$ Дж;

4) 10^{-3} Дж.

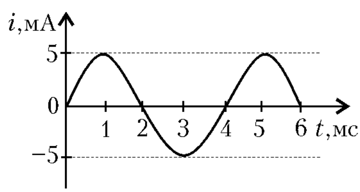


Рис. 24

А20. На рисунке 25 представлены несколько самых нижних уровней энергии атома водорода. Может ли атом, находящийся в состоянии E_1, поглотить фотон с энергией 3,4 эВ?

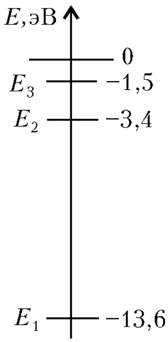


Рис. 25

1) Да, при этом атом переходит в состояние E_2;

2) да, при этом атом переходит в состояние E_3;

3) да, при этом атом ионизуется, распадаясь на протон и электрон;

4) нет, энергии фотона недостаточно для перехода атома в возбужденное состояние.

A21. Ядро атома содержит 16 нейтронов и 15 протонов, вокруг него обращаются 15 электронов. Эта система частиц:

1) ион фосфора $^{30}_{15}P$;

2) ион серы $^{31}_{16}S$;

3) атом серы $^{31}_{16}S$;

4) атом фосфора $^{31}_{15}P$.

A22. Из какого ядра после одного α-распада и одного β-распада образуется ядро $^{211}_{83}Bi$?

1) $^{216}_{84}Po$; 2) $^{219}_{86}Rh$; 3) $^{211}_{80}Hg$; 4) $^{215}_{84}Po$.

A23. В таблице представлены результаты измерений максимальной энергии фотоэлектронов при двух разных значениях длины волны падающего монохроматического света ($\lambda_{кр}$ — длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта).

Длина волны падающего света λ	$0,5\,\lambda_{кр}$	$0,25\,\lambda_{кр}$
Максимальная энергия фотоэлектронов $E_{макс}$	–	E_0

Какое значение энергии пропущено в таблице?

1) E_0; 2) $\frac{1}{2}E_0$;

3) $\frac{1}{3}E_0$; 4) $\frac{1}{4}E_0$.

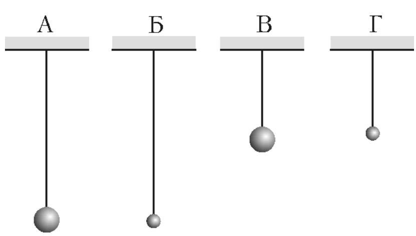


Рис. 26

A24. Грузы маятников – медные шарики. Какую пару маятников (рис.26) надо выбрать, чтобы экспериментально выяснить, зависит ли период малых колебаний математического маятника от длины нити?

1) А и Б; 2) А и В;
3) А и Г; 4) Б и В.

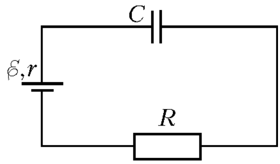


Рис. 27

А25. Конденсатор подключен к источнику тока последовательно с резистором сопротивлением R = 10 кОм (рис.27). Результаты измерений напряжения между обкладками конденсатора представлены в таблице.

t, с	0	1	2	3	4	5	6	7
U, В	0	3,8	5,2	5,7	5,9	6,0	6,0	6,0

Точность измерения напряжения $\Delta U = \pm 0{,}1$В. Оцените силу тока в цепи в момент t = 2 с. Сопротивлением проводов и внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

1) 220 мкА; 2) 80 мкА;
3) 30 мкА; 4) 10 мкА.

Часть 2

В1. В результате перехода с одной круговой орбиты на другую центростремительное ускорение спутника Земли уменьшается. Как изменяются в результате этого перехода радиус орбиты спутника, скорость его движения по орбите и период обращения вокруг Земли? Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

1) увеличилась;
2) уменьшилась;
3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

Радиус орбиты	Скорость движения по орбите	Период обращения вокруг Земли

В2. Установите соответствие между процессами в идеальном газе и формулами, которыми они описываются (N – число частиц, p – давление, V – объем, T – абсолютная температура, Q – количество теплоты.) К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ПРОЦЕССЫ	ФОРМУЛЫ
А) изобарный процесс при N = const	1) $\frac{p}{T} = \text{const}$
Б) изотермический процесс при N = const	2) $\frac{V}{T} = \text{const}$
	3) $pV = \text{const}$
	4) $Q = 0$

А	Б

В3. Однородный стержень AB массой 100 г покоится, упираясь в стык дна и стенки банки концом B и опираясь на край банки в точке C (рис.28). Модуль силы, с которой стержень давит на стенку сосуда в точке C, равен 0,5 Н. Чему равен модуль вертикальной составляющей силы, с которой стержень давит на сосуд в точке B, если модуль горизонтальной составляющей этой силы равен 0,3 Н? Трением пренебречь.

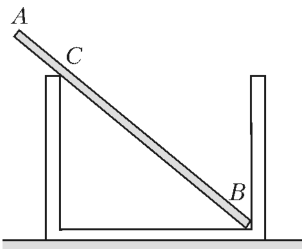


Рис. 28

В4. Две частицы, имеющие отношение зарядов $q_1/q_2 = 1/4$ и отношение масс $m_1/m_2 = 2$, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно его линиям индукции и движутся по окружностям. Определите отношение радиусов траекторий R_1/R_2 частиц, если отношение их скоростей $v_1/v_2 = 2$.

В5. К потолку комнаты высотой 4 м прикреплена лампа накаливания. На высоте 2 м от пола параллельно ему расположен непрозрачный квадрат со стороной 2 м. Центр лампы и центр квадрата лежат на одной вертикали. Найдите площадь тени квадрата на полу.

Часть 3

С1. В цилиндрическом сосуде под поршнем длительное время находятся вода и ее пар. Поршень начинают выдвигать из сосуда. При этом температура воды и пара остается неизменной. Как будет меняться при этом масса жидкости в сосуде? Ответ поясните, указав, какие физические закономерности вы использовали для объяснения.

С2. Снаряд массой 4 кг, летящий со скоростью 400 м/с, разрывается на две равные части, одна из которых летит в направлении движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на 0,5 МДж. Найдите скорость осколка, летящего по направлению движения снаряда.

C3. В горизонтальном цилиндрическом сосуде, закрытом поршнем, находится одноатомный идеальный газ. Первоначальное давление газа $p_1 = 4 \cdot 10^{-5}$ Па. Расстояние от дна сосуда до поршня равно L. Площадь поперечного сечения поршня $S = 25\,\text{см}^2$. В результате медленного нагревания газ получил количество теплоты Q = 1,65 кДж, а поршень сдвинулся на расстояние x = 10 см. При движении поршня на него со стороны стенок сосуда действует сила трения $F_{\text{тр}} = 3 \cdot 10^3$ Н. Найдите L. Считайте, что сосуд находится в вакууме.

C4. По гладкой горизонтальной направляющей длиной $2l$ скользит бусинка с положительным зарядом $Q > 0$ и массой m (рис.29). На концах направляющей находятся положительные заряды $q > 0$. Бусинка совершает малые колебания относительно положения равновесия, период которых равен T. Чему будет равен период колебаний бусинки, если ее заряд увеличить в 2 раза?

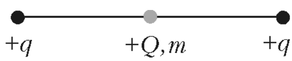


Рис. 29

C5. Горизонтальный проводящий стержень прямоугольного сечения поступательно движется с ускорением вверх по гладкой наклонной плоскости в вертикальном однородном магнитном поле (рис.30). По стержню протекает ток I. Угол наклона плоскости $\alpha = 30^\circ$. Отношение массы стержня к его длине m/L = 0,1 кг/м. Модуль индукции магнитного поля B = = 0,2 Тл. Ускорение стержня a = = 1,9 м/с^2. Чему равна сила тока в стержне?

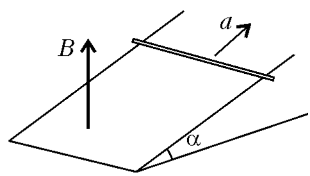


Рис. 30

C6. Фотон с длиной волны, соответствующей красной границе фотоэффекта, выбивает электрон из металлической пластинки (катода) сосуда, из которого откачан воздух. Электрон разгоняется однородным электрическим полем напряженностью $E = 5 \cdot 10^4$ В/м. До какой скорости электрон разгонится в этом поле, пролетев расстояние $s = 5 \cdot 10^{-4}$ м? Релятивистские эффекты не учитывать.

Дополнительные тестовые задачи с несколькими вопросами

1. Материальная точка движется с постоянной скоростью по окружности радиусом R. Как изменятся перечисленные в первом столбце физические величины, если скорость точки увеличится?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) угловая скорость	1) увеличится
Б) центростремительное ускорение	2) уменьшится
В) период обращения по окружности	3) не изменится

2. Брусок скользит по наклонной плоскости вниз без трения. Что происходит при этом с его скоростью, потенциальной энергией, силой реакции наклонной плоскости?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) скорость	1) увеличится
Б) потенциальная энергия	2) уменьшится
В) сила реакции наклонной плоскости	3) не изменится

3. Одна шайба скользит по горизонтальной поверхности, а другая такая же покоится. Как изменяются кинетическая энергия первой шайбы и их общая механическая энергия в результате абсолютно упругого столкновения шайб?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) кинетическая энергия первой шайбы	1) увеличивается
Б) их общая механическая энергия	2) уменьшается
	3) не изменяется

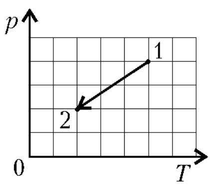


Рис. 31

4. Идеальный одноатомный газ переходит из состояния 1 в состояние 2 (рис.31). Масса газа не меняется. Как ведут себя перечисленные ниже величины, описывающие этот газ в ходе указанного на диаграмме процесса?

ВЕЛИЧИНЫ	ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ
А) давление газа	1) увеличивается
Б) объем газа	2) уменьшается
В) внутренняя энергия	3) не изменяется

5. В сосуде неизменного объема находилась при комнатной температуре смесь двух идеальных газов, по 1 моль каждого. Половину содержимого сосуда выпустили, а затем добавили в сосуд 1 моль первого газа. Как изменились в результате парциальные давления газов и их суммарное давление, если температура газов в сосуде поддерживалась неизменной?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ
А) парциальное давление первого газа	1) увеличилось
Б) парциальное давление второго газа	2) уменьшилось
В) давление смеси газов в сосуде	3) не изменилось

6. Одноатомный идеальный газ неизменной массы в изотермическом процессе совершает работу $A > 0$. Как меняются в этом процессе объем, давление и внутренняя энергия газа?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) объем газа	1) увеличивается
Б) давление газа	2) уменьшается
В) внутренняя энергия газа	3) не изменяется

7. Температуру холодильника тепловой машины увеличили, оставив температуру нагревателя прежней. Количество теплоты, полученное газом от нагревателя за цикл, не изменилось. Как изменились при этом КПД тепловой машины, количество теплоты, отданное газом за цикл холодильнику, и работа газа за цикл:

1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась?

8. Плоский воздушный конденсатор зарядили до некоторой разности потенциалов и отключили от источника тока. Как изменятся перечисленные в первом столбце физические величины, если пластины конденсатора раздвинуть на некоторое расстояние?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) заряд на обкладках конденсатора	1) увеличится
Б) электроемкость конденсатора	2) уменьшится
В) энергия электрического поля конденсатора	3) не изменится

9. К концам длинного однородного проводника приложено напряжение U. Проводник укоротили вдвое и приложили к нему прежнее напряжение U. Какими станут при этом сила и мощность тока, сопротивление проводника?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) сила тока в проводнике	1) уменьшится
Б) сопротивление проводника	2) увеличится
В) выделяющаяся на проводнике тепловая мощность	3) не изменится

10. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r сначала был замкнут на внешнее сопротивление R. Затем внешнее сопротивление увеличили. Как при этом изменятся сила тока в цепи и напряжение на внешнем сопротивлении?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ
А) сила тока	1) увеличится
Б) напряжение на внешнем сопротивлении	2) уменьшится
	3) не изменится

11. Частица массой m, несущая заряд q, движется в однородном магнитном поле с индукцией B по окружности радиусом R со скоростью v. Что произойдет с радиусом орбиты, периодом обращения и кинетической энергией частицы при увеличении скорости движения?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) радиус орбиты	1) увеличится
Б) период обращения	2) уменьшится
В) кинетическая энергия	3) не изменится

12. Подвешенный на пружине груз совершает вынужденные гармонические колебания под действием силы, меняющейся с частотой ν. Установите соответствие между физическими величинами этого процесса и частотой их изменения.

ВЕЛИЧИНЫ	ЧАСТОТА ИЗМЕНЕНИЯ
А) кинетическая энергия	1) $\frac{1}{2}\nu$
Б) скорость	2) ν
В) потенциальная энергия	3) 2ν

13. Массивный шарик, подвешенный к потолку на упругой пружине, совершает вертикальные гармонические колебания. Как ведет себя модуль и каково направление векторов скорости и ускорения шарика в момент, когда шарик проходит положение равновесия, двигаясь вниз?

ВЕКТОР	МОДУЛЬ И НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА
А) скорость шарика	1) достигает максимума; вверх
Б) ускорение шарика	2) достигает максимума; вниз
	3) равняется нулю

14. Электрический колебательный контур радиоприемника настроен на длину волны λ. Как изменятся период колебаний в контуре, их частота и соответствующая им длина волны, если площадь пластин конденсатора уменьшить?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) период колебаний	1) не изменится
Б) частота	2) уменьшится
В) длина волны	3) увеличится

15. Конденсатор колебательного контура подключен к источнику постоянного напряжения (рис.32). Графики А и Б (рис.33) представляют изменения физических величин, характеризующих колебания в контуре после переведения переключателя K в положение 2. Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут представлять.

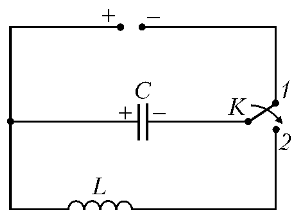


Рис. 32

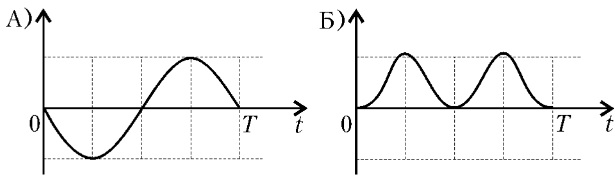


Рис. 33

ГРАФИКИ	ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ
А)	1) заряд левой обкладки конденсатора
Б)	2) энергия электрического поля конденсатора
	3) сила тока в катушке
	4) энергия магнитного поля катушки

16. Световой пучок выходит из стекла в воздух (рис.34). Что происходит при этом с частотой электромагнитных колебаний в световой волне, скоростью их распространения, длиной волны:

1) увеличивается; 2) уменьшается;
3) не изменяется?

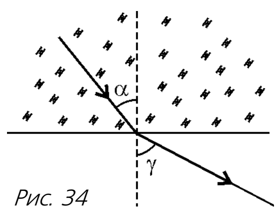


Рис. 34

17. Как изменятся заряд и массовое число радиоактивного ядра в результате его β-распада?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ИХ ИЗМЕНЕНИЕ
А) заряд	1) увеличится
Б) массовое число	2) не изменится
	3) уменьшится

18. Для некоторых атомов характерной особенностью является возможность захвата атомным ядром одного из ближайших к нему электронов. При захвате электрона некоторые характеристики атомного ядра изменяются. Как ведут себя перечисленные ниже характеристики атомного ядра при захвате ядром электрона?

ВЕЛИЧИНЫ	ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ
А) массовое число ядра	1) не изменяется
Б) заряд ядра	2) увеличивается
	3) уменьшается

19. Ядро атома претерпевает спонтанный α-распад. Как изменяются перечисленные ниже характеристики атомного ядра при таком распаде?

ВЕЛИЧИНЫ	ХАРАКТЕР ИЗМЕНЕНИЯ
А) масса ядра	1) не изменяется
Б) заряд ядра	2) увеличивается
В) число протонов в ядре	3) уменьшается

20. При каких условиях наблюдается равновесие рычага с неподвижной осью и свободное падение тел вблизи поверхности Земли?

ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ	УСЛОВИЯ НАБЛЮДЕНИЯ
А) равновесие рычага	1) $\vec{F}_{\text{равнодейств}} = 0$
Б) свободное падение	2) $F_1 \cdot l_2 = F_2 \cdot l_1$
	3) $\vec{F}_{\text{равнодейств}} = \vec{F}_{\text{тяж}}$
	4) $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$

21. Установите соответствие между названием физической величины и формулой, по которой ее можно определить.

НАЗВАНИЕ	ФОРМУЛА
А) количество теплоты, необходимое для нагревания тела	1) $\dfrac{Q}{m}$
	2) $q \cdot \Delta T$
Б) удельная теплота плавления кристаллического вещества	3) $\dfrac{Q}{m \cdot \Delta T}$

В) количество теплоты, выделяемое при сгорании топлива

4) $c \cdot m \cdot \Delta T$
5) $q \cdot m$

22. Резистор сопротивлением R подключен к источнику тока с внутренним сопротивлением r. Сила тока в цепи равна I. Чему равны ЭДС источника и напряжение на его выводах?

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) ЭДС источника	1) Ir
Б) напряжение на выводах источника	2) IR
	3) $I(R+r)$
	4) IR^2/r

23. Пучок света переходит из воды в воздух. Частота световой волны ν , скорость света в воде v, показатель преломления воды относительно воздуха n. Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать.

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) длина волны света в воздухе	1) $\dfrac{v}{n \cdot \nu}$
Б) длина волны света в воде	2) $\dfrac{n \cdot \nu}{v}$
	3) $\dfrac{n \cdot v}{\nu}$
	4) $\dfrac{v}{\nu}$

24. Установите соответствие между физическими величинами и формулами, по которым их можно рассчитать (ν – частота фотона, E – энергия фотона, h – постоянная Планка, c – скорость света в вакууме).

ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ	ФОРМУЛЫ
А) длина волны	1) $\dfrac{h \cdot \nu}{c}$
Б) импульс фотона	2) $\dfrac{h \cdot c}{\nu}$
	3) $\dfrac{h \cdot c}{E}$
	4) $\dfrac{h}{\nu}$

25. Какой из перечисленных предметов обязательно входит в состав цепи постоянного тока и колебательного контура?

ФИЗИЧЕСКОЕ УСТРОЙСТВО	ЕГО НЕОБХОДИМЫЙ ЭЛЕМЕНТ
А) цепь постоянного тока	1) амперметр
Б) колебательный контур	2) источник тока
	3) конденсатор
	4) постоянный магнит

26. Установите соответствие между физическими явлениями и приборами, в которых используются или наблюдаются эти явления.

ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ	ПРИБОР
А) ионизация газа	1) вакуумный фотоэлемент
Б) фотоэффект	2) дифракционная решетка
	3) счетчик Гейгера
	4) лупа

27. Установите соответствие между типом ядерных реакций и уравнением ядерной реакции, к которому она относится.

ТИП РЕАКЦИИ	УРАВНЕНИЕ РЕАКЦИИ
А) α-распад	1) ${}^{235}_{92}\mathrm{Al} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{235}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$
Б) β-распад	2) ${}^{239}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow {}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$
В) реакция термоядерного	3) ${}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n$
синтеза	4) ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{97}_{40}\mathrm{Zr} + {}^{137}_{52}\mathrm{Te} + 2{}^{1}_{0}n$
	5) ${}^{209}_{82}\mathrm{Pb} \rightarrow {}^{209}_{83}\mathrm{Bi} + {}^{0}_{-1}e$

Публикацию подготовили М.Демидова, А.Черноуцан

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

(заочный тур)

Задачи 1–6 предлагались для всех факультетов, а дополнительные задачи 7–10 были рассчитаны только на поступающих на механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики.

1. В волейбольном турнире каждая команда сыграла с каждой ровно по одному разу, причем 25% команд ни разу не выиграли. Сколько команд участвовало в турнире?

2. Решите уравнение

$$3\cos x + 4\sin x \sin y = \frac{5}{\cos 2010y}.$$

3. Найдите произведение двух трехзначных натуральных чисел, если оно втрое меньше шестизначного числа, получающегося приписыванием одного из этих двух чисел вслед за другим.

4. Решите уравнение

$$[n\lg 2] + [n\lg 5] = 2010$$

относительно натурального числа n (через $[x]$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x).

5. Из вершины C прямого угла треугольника ABC опущена высота CH. Где на отрезке BH нужно поставить точку M, чтобы из отрезков AH, AM и CM можно было составить прямоугольный треугольник?

6. Найдите все значения $k > 2$, при каждом из которых существует непостоянная арифметическая прогрессия $x_1, \ldots, x_k$ и квадратный трехчлен $f(x)$, для которых $f(x_1), \ldots, f(x_k)$ – геометрическая прогрессия.

7. Прямые l_1, l_2 и l_3 пересекаются в точке A про углом $60°$ друг к другу. Заяц, начиная из точки A, совершает последовательные прыжки длиной 1 каждый: первый прыжок – в направлении прямой l_1, второй – в направлении l_2, третий – в направлении l_3, следующий – в направлении l_1 и т.д. (по циклу). В какой-то момент заяц остановился на одной из этих трех прямых на расстоянии 2010 от точки A. В каком направлении был совершен его последний прыжок?

8. Найдите наименьшее значение величины $2|x|-|y|$ при условии

$$\log_4(x+2y)+\log_4(x-2y)=1.$$

9. Существует ли тетраэдр, длины всех шести ребер которого образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $\sqrt[3]{2}$?

10. Число P – произведение всех простых чисел, меньших 30. Из натуральных делителей числа P требуется составить множество M, в котором ни одно число не делится нацело на другое. Какое наибольшее количество чисел может содержать множество M?

Вариант 2

(очный тур: Москва)

1 (3 балла). У Пети есть два разных стакана цилиндрической формы. Он заметил, что банку сока можно так разлить по этим стаканам, что уровень сока в первом стакане составит 12 см, а во втором – 10 см, или так, что уровень сока в первом стакане составит 8 см, а во втором – 12 см. На каком уровне окажется сок в каждом из этих стаканов, если сок из банки разлить по стаканам поровну?

2 (3 балла). Сколько различных решений на отрезке $[0;\pi]$ имеет уравнение

$$6\sqrt{2}\sin x\,\mathrm{tg}x-2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}x+3\sin x-1=0\ ?$$

Найдите эти решения.

3 (4 балла). Положительные числа b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 составляют геометрическую прогрессию. Сумма логарифмов по основанию 2 от этих чисел равна 15. Найдите эти числа, если

$$\log_2 b_1\cdot\log_2 b_5=-7.$$

4 (5 баллов). Окружность с центром в точке O, лежащей на стороне AB треугольника ABC, проходит через точку A, пересекает сторону AC в точке K, а сторону BC – в точках L и M. Известно, что $KC=CL=MB=3$, $AK=4$. Найдите отношение длин отрезков AO и OB.

5 (7 баллов). Найдите все значения параметра a, при которых для любого значения параметра b неравенство

$$(a+b)x^2+(3b-4a-7)x+4a-2b+6\geq 0$$

имеет хотя бы одно решение.

6 (8 баллов). Через точки M, N, K, L, лежащие соответственно на ребрах SA, SB, SC, SD правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S – вершина), проведена плоскость. Известно, что $MK \perp NL$, $SN = 3SL$ и площадь треугольника SMK равна 12. Найдите площадь треугольника SLN.

Публикацию подготовили В.Алексеев, А.Бегунц, П.Бородин, О.Косухин, В.Панфёров, В.Ушаков, И.Шейпак

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ–2010»

МАТЕМАТИКА

1. Решите неравенство

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-(\log_3 2)^{2x-1}}.$$

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC взяты точки D и F соответственно так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 2 : 3$?

3. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил еще 1 млн р., его доля увеличилась еще на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить, чтобы увеличить свою долю еще на 0,04?

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}}-\frac{1}{\sqrt{x+4}} \le 1+\frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

5. Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

6. Проекции некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости Oxz и Oyz удовлетворяют уравнениям $5x+\cos z=0$ и $z=\operatorname{arctg}\sqrt{y-3}$ соответственно. Найдите функцию $y=f(x)$, график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость Oxy.

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x-13\cdot 5^x+a<0, \\ 12\sin^4 \pi x-\cos 4\pi x=11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

8. На ребре AS треугольной пирамиды $SABC$ отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NS$. Найдите площадь треугольника NBC, если площади треугольников ABC, MBC и SBC равны 1, 2 и $\sqrt{37}$ соответственно.

9. На доске написан квадратный трехчлен $x^2 + 9x + 47$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x, после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только у написанного на доске многочлена оказывается целый корень, Ваня получает оценку «пять». Может ли он обеспечить себе «пятерку» при любых действиях Тани, если: а) $m = 2$; б) $m = 3$?

10. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD – в точках A и D соответственно. Найдите $AK^2 + DL^2$.

МЕХАНИКА

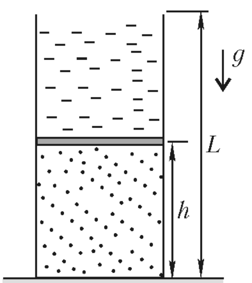
1. Два мотоциклиста движутся по прямолинейным трассам (каждый по своей) с постоянными скоростями. В 17:00 расстояние между ними было 40 км, в 17:40 – 30 км, в 18:10 – 30 км. а) Определите момент времени, в который мотоциклисты будут находиться на кратчайшем расстоянии друг от друга. б) Определите величину скорости одного мотоциклиста относительно другого.

2. Спускаемые аппараты A и $Б$ движутся вертикально вниз с постоянными скоростями под действием силы тяжести, силы сопротивления воздуха и силы тяги тормозного двигателя. Спускаемый аппарат $Б$, втрое большего диаметра, чем аппарат A, будет двигаться с той же установившейся скоростью, что и аппарат A, если сила тяги его тормозного двигателя будет в 33 раза больше. Найдите отношение силы тяжести к силе тяги тормозного двигателя аппарата A, считая, что аппараты – однородные шары одной и той же плотности, изменение масс которых в процессе спуска пренебрежимо мало, и что сила сопротивления создается абсолютно упругими ударами молекул воздуха о корпус аппарата.

3. На расстоянии 200 м от прямолинейной дороги находится колодец с живой водой, к которому стремится раненый богатырь. В начальный момент времени богатырь находится на дороге и расстояние между ним и колодцем равно 1400 м. а) Через какое минимальное время богатырь может добраться до колодца, если он передвигается по дороге со скоростью 8 км/ч, а по бездорожью – в два раза медленней? б) Успеет ли он добраться до колодца, если ресурс его жизненных сил всего 13 мин?

4. Мама Лягушка массой $M_1 = 10$ г и ее маленький сын Лягушонок массой $M_2 = 5$ г сидели на плавающей дощечке массой $m = 15$ г, когда к ним на лодке приблизился рыболов. Лягушки, испугавшись, прыгнули с дощечки в воду, и рыболов увидел, как дощечка, получив импульс, начала двигаться по инерции. Как должны прыгать лягушки (по очереди или одновременно и в каком направлении), чтобы дощечка приобрела максимально возможную скорость? Найдите эту скорость. Считается, что лягушки, оттолкнувшись, приобретают одну и ту же скорость $v = 2{,}4$ м/с относительно дощечки. Сопротивлением воды пренебречь.

5. В процессе работы ученому потребовалось сравнить две величины $f(x_1)$ и $f(x_2)$, где $f(x) = 21x^5 + 32x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 4x + 3 + \sin x$, а числа x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) – соответственно меньший и больший корень квадратного уравнения $7x^2 + 6x + 1 = 0$. Электронных вычислительных средств под рукой не оказалось, но ученый, подумав, быстро справился с задачей. Попробуйте сделать необходимое сравнение и вы. Ответ обоснуйте.



6. Химический реактор (см. рисунок) представляет собой цилиндрическую емкость высотой $L = 17{,}5$ м, разделенную подвижным поршнем на две камеры. Первоначально поршень находился в самом верхнем положении. Сверху на поршень налили воду так, что поршень опустился до высоты $h = 10$ м над дном реактора, и в нижней камере реактора давление стало $p = 1{,}75 \cdot 10^5$ Па, а температура стала $T_0 = 63$ °C. До какой минимальной температуры необходимо нагреть нижнюю камеру реактора, чтобы вся вода вылилась, если атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3 и ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2?

Публикацию подготовили В.Алексеев, А.Бегунц, П.Бородин, А.Зеленский, О.Косухин, В.Панфёров, В.Ушаков, И.Шейпак, М.Юмашев

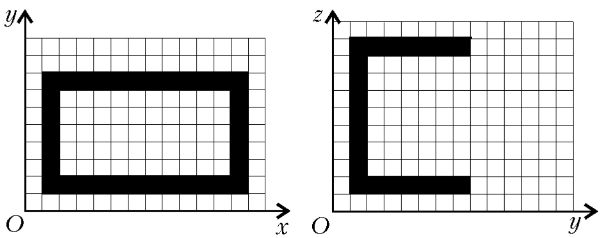
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Межрегиональная многопрофильная олимпиада

МАТЕМАТИКА

I этап

1. На рисунке приведены проекции детали на координатные плоскости XOY и YOZ. Сторона клеточки равна 1. Каким может быть наибольший возможный объем детали?



2. В классе мальчиков больше, чем девочек. Среди каждых 10 учеников найдется по крайней мере одна девочка. Каково максимальное возможное число учеников в классе?

3. Каков наибольший радиус окружности, которую можно поместить внутрь трапеции с основаниями 5 и 17 и боковыми сторонами 10? (Такая окружность может касаться некоторых сторон трапеции.)

4. Известно, что замкнутая ломаная линия состоит из 29 звеньев, причем никакие два звена не лежат на одной прямой. Какое наибольшее число точек самопересечения возможно для такой линии? (Вершины ломаной не считаются точками самопересечения.)

5. По прямой на некотором расстоянии друг от друга (не вплотную) катятся с равными скоростями 5 абсолютно упругих шариков. Еще 7 таких же шариков катятся с той же скоростью им навстречу. Сколько всего произойдет столкновений? (При абсолютно упругом столкновении двух шариков, движущихся навстречу друг другу с равными скоростями, шарики после соударения разлетаются в противоположные стороны с теми же скоростями.)

6. Натуральные числа a, b, c имеют соответственно 6, 9, 14 различных натуральных делителей (включая единицу и само число). $\text{НОД}(a,b,c)=6$. Найдите $\text{НОД}(a,b)\times\text{НОД}(b,c)$.

7. Найдите предпоследнюю цифру числа 29^{2010}.

8. Найдите наибольшее целое решение уравнения

$$3^{x^2-22x+120}+6^{2x^2-20x-23}=2^{x^2-22x+120}.$$

9. В треугольной пирамиде все высоты боковых граней, проведенные из вершины, равны 13, периметр основания равен 75, объем равен 750. Найдите высоту пирамиды.

10. Окружность с центром в точке $(4;1)$ касается параболы $y=\frac{1}{2}x^2$. Найдите абсциссу точки касания.

II этап

1. Можно ли расположить на плоскости 2010 лучей таким образом, чтобы ни через какую точку плоскости не проходило более двух лучей, каждый луч пересекался ровно с двумя другими и любые две точки на любых двух лучах можно было соединить ломаной, целиком содержащейся в объединении этих лучей?

2. Среди всех четверок натуральных чисел (k,l,m,n), $k>l>m>n$, найдите такую, что сумма $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ меньше единицы и ближе всего к ней.

3. С натуральным числом производится следующая операция: отбрасывается самая правая цифра его десятичной записи, после чего к полученному после ее отбрасывания числу прибавляется удвоенная отброшенная цифра. Например: $157\mapsto 15+2\times 7=29$, $5\mapsto 0+2\times 5=10$. Натуральное число называется хорошим, если после многократного применения этой операции получаемое число перестает меняться. Найдите наименьшее 100-значное хорошее число.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AA_1. H – точка пересечения высот треугольника ABC. Известно, что $AH=3$, $A_1H=2$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4. Найдите расстояние от центра этой окружности до H.

5. Пусть x – такое число из интервала $(\pi/2;\pi)$, что

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}\right)=1.$$

Докажите, что число

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4\left(\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x}\right)$$

целое, и найдите его.

6. Через центр сферы радиуса $\sqrt{2}$ проведены 6 прямых, параллельных ребрам некоторого правильного тетраэдра. Точки пересечения этих прямых со сферой являются вершинами выпуклого многогранника. Вычислите объем и площадь поверхности этого многогранника.

Устный вступительный экзамен по математике на факультет математики

1. Найдите площадь фигуры на плоскости, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} y > x^3, \\ x^2+y^2<1, \\ x^2+y^2+2x-2y+1>0. \end{cases}$$

2. Восьми вершинам кубика поставлены в соответствие восемь чисел, среди которых есть 0 и 1. Каждое из восьми чисел заменили средним арифметическим трех чисел, поставленных в соответствие трем соседним вершинам. После десяти повторений этой операции в каждой вершине оказалось то же число, что и вначале. Найдите эти восемь чисел.

3. Найдите все решения уравнения $2^{\cos x}+2^{\sin x}=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Длины всех высот треугольника – целые числа. Радиус вписанной окружности равен 1. Докажите, что треугольник правильный.

5. Докажите, что число, десятичная запись которого состоит из $k+1$ единицы, k пятерок и 1 шестерки (в указанном порядке слева направо), является квадратом целого числа.

6. Отрезки AB и CD лежат на скрещивающихся прямых в пространстве. Найдите геометрическое место середин отрезков, один конец которых лежит на AB, а другой – на CD.

Публикацию подготовил Г.Рыбников

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Первый член арифметической прогрессии равен $-\frac{7}{3}$, разность прогрессии равна $\frac{1}{4}$. Без помощи калькулятора найдите член прогрессии, ближайший к числу $\frac{35}{6}$. Найдите номер этого члена в прогрессии.

2. Решите уравнение

$$2x + 5 = \sqrt{x^4 - 6x^3 - 22x^2 + 20x + 25}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{8-7x}\left(x^3 - 3x^2 - \frac{37}{8}x + \frac{55}{8}\right) + 2\log_{(8-7x)^2}(x+3) = 1.$$

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах B и E прямые, а остальные углы равны между собой. Найдите площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14 + 8\sqrt{2}$, $AB = 2$, $BC = 5$, $DE = 4$.

5. Решите уравнение

$$5\sin 11x + 4\cos 3x + 3\sin 3x = 0.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\log_5 x + 4\left(1 - a^2\right)\log_{25x} 5 - 2 = 0$$

имеет ровно два различных корня, расстояние между которыми больше $\frac{24}{5}$?

Вариант 2

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Первый член арифметической прогрессии равен $\frac{1}{5}$, разность прогрессии равна $-\frac{1}{3}$. Без помощи калькулятора найдите член прогрессии, ближайший к числу $-\frac{38}{3}$. Найдите номер этого члена в прогрессии.

2. Решите уравнение

$$3x + 7 = \sqrt{x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 42x + 49}\,.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{2-x}\left(x^3 - 3x^2 - \frac{13}{8}x + \frac{31}{8}\right) + 2\log_{(2-x)^2}(x+3) = 1\,.$$

4. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ углы при вершинах C и F прямые, а остальные углы равны между собой. Найдите площадь шестиугольника, если известно, что его периметр равен $14 + 4\sqrt{2}$, $AF = 3$, $CD = 1$, $EF = 4$.

5. Решите уравнение

$$5\sin 3x + 2\sqrt{6}\cos 3x = 7\sin 7x\,.$$

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\log_a x + 3\log_{ax^2} a + 5 = 0$$

имеет ровно два различных корня, расстояние между которыми меньше $6/25$?

Вариант 3

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. В 6 часов утра из M в N выехал велосипедист. Спустя полчаса из N в M выехал мотоциклист. Определите время их встречи, если известно, что в пункт назначения мотоциклист прибыл на 2 минуты позже велосипедиста и что скорость велосипедиста в три раза меньше скорости мотоциклиста.

2. Решите уравнение

$$\sin 2x - \cos 2x = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \frac{1}{2}\,.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{x+6}^2(x+5)=\log_{8-x}^2(x+5).$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна S, а основание AB в три раза больше основания CD. На боковой стороне AD выбрана точка K так, что площади треугольников ABK и BCK равны. Найдите площадь треугольника CDK.

5. Решите неравенство

$$2+x<5\sqrt{|x-4|}.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{x-y}\dfrac{xy}{2}=2,\\ x+y=xy+1.\end{cases}$$

Вариант 4

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. В 12 часов дня из A в B выехал мотоциклист. Спустя 24 минуты из B в A выехал автомобиль. Определите время их встречи, если известно, что в пункт назначения автомобиль прибыл на 6 минут раньше мотоциклиста и что скорость автомобиля в два раза больше скорости мотоциклиста.

2. Решите уравнение

$$\sin 2x-\cos 2x=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}x+\frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{1-x}^2(x+3)=\log_{x+7}^2(x+3).$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна S, а основание BC в два раза меньше основания AD. На боковой стороне AB выбрана точка M так, что площади треугольников ADM и BCM равны. Найдите площадь треугольника CDM.

5. Решите уравнение

$$4-x<5\sqrt{|2+x|}.$$

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{x+y}\left(\dfrac{3xy}{2}+1\right)=2,\\ x-y=xy-1.\end{cases}$$

Задачи ежегодной олимпиады

(все факультеты)

1 (3 балла). К Андрею на дачу должен приехать друг, чтобы помочь ему выкопать картошку. Чтобы встретить друга, Андрей выехал с дачи на машине так, чтобы приехать на станцию к электричке, прибывающей в 13.00. По пути он встретил друга, идущего к даче пешком, поскольку он приехал на электричке, прибывшей на час раньше, и решил сам идти к даче. В результате друзья приехали на дачу на 30 мин раньше. Определите время встречи Андрея с другом.

2 (3 балла). Найдите все решения неравенства $\cos\frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$, лежащие в интервале $\left(-\frac{83}{20}; 0\right)$.

3 (4 балла). В параллелограмме со сторонами 3 и 5 проведены биссектрисы четырех внутренних углов. Найдите отношение площади четырехугольника, образовавшегося при пересечении биссектрис, к площади параллелограмма.

4 (4 балла). Определите все значения параметра a, при которых уравнение $x + \sqrt{x(a-x)} = 1$ имеет хотя бы одно решение.

5 (5 баллов). Известно, что натуральные числа a, b удовлетворяют двум условиям:

• сумма a и b равна 555,

• наименьшее общее кратное a и b в 26 раз больше, чем их наибольший общий делитель.

Найдите a и b.

6 (5 баллов). На числовой прямой отложены точки с координатами $a_k = k\sqrt{2}$, $k = 1, 2, 3\ldots$ Вправо от точки 0 откладывается отрезок, длина которого меняется, причем каждый следующий раз отрезок откладывается от конца предыдущего отрезка. Начальная длина отрезка равна 1. Если отрезок, отложенный в очередной раз, закрывает менее 5 точек a_k, то длина отрезка увеличивается на 1, если более 5 точек – уменьшается на 1, если же отрезок закрывает ровно 5 точек a_k, то его длина остается прежней. Верно ли, что начиная с некоторого момента времени длина откладываемого отрезка будет постоянной? Ответ обоснуйте.

ФИЗИКА

Задачи ежегодной олимпиады

(все факультеты)

1 (3 балла). Скорость света в неподвижном веществе равна $u = c/n$, где c − скорость света в вакууме, n − абсолютный показатель преломления вещества. Найдите скорость света u_1 в веществе, движущемся равномерно со скоростью v относительно источника света так, что вещество удаляется от источника.

2 (3 балла). Два шкива соединены ременной передачей, передающей вращение от одного шкива к другому (рис.1). Ведущий шкив вращается с частотой $\nu_1 = 3000$ об/мин, ведомый шкив – с частотой $\nu_2 = 600$ об/мин. Ведомый шкив имеет диаметр $D_2 = 500$ мм. Какой диаметр D_1 имеет ведущий шкив?

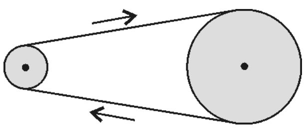


Рис. 1

3 (3 балла). С лодки массой $M = 200$ кг, движущейся со скоростью $v = 1$ м/с, ныряет мальчик массой $m = 50$ кг, первоначально двигаясь в горизонтальном направлении. Какой станет скорость лодки v_2 после прыжка мальчика, если он прыгает с кормы со скоростью $v_1 = 4$ м/с в направлении, противоположном направлению движения лодки?

4 (3 балла). При каждом ходе поршневой насос захватывает $V_0 = 20$ л воздуха при нормальных условиях ($p_0 = 1$ атм, $T_0 = 273$ К) и нагнетает его в резервуар объемом $V = 2$ м^3. Температура воздуха в резервуаре поддерживается равной $T = 300$ К. Сколько ходов n должен сделать поршень насоса, чтобы повысить давление в резервуаре от $p_0 = 1$ атм до $p = 8$ атм?

5 (4 балла). К точкам *1* и *2* электрической цепи, состоящей из источника тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением и резисторов с сопротивлениями R_1 и R_2, длинными тонкими проводниками подсоединили первоначально незаряженные металлические шары с радиусами a_1 и a_2 соответственно (рис.2). Найдите заряды Q_1 и Q_2, установившиеся на каждом из шаров. Расстояние между шарами много больше их размеров, заряд на самой электрической цепи и соединительных проводниках пренебрежимо мал.

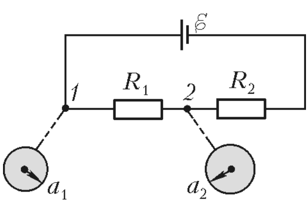


Рис. 2

6 (3 балла). Под каким углом α должен падать световой луч из воздуха на поверхность стекла, чтобы угол преломления был в два раза меньше угла падения? Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным 1, абсолютный показатель преломления стекла n = 1,6.

7 (3 балла). Под колоколом воздушного насоса находится вода, масса которой m_1 = 40 г, а температура $0\ ^\circ C$. Воздух из-под колокола быстро откачивают. Благодаря интенсивному испарению части жидкости вся оставшаяся вода замерзает. Определите массу m образовавшегося льда, если его температура также $0\ ^\circ C$. Удельная теплота плавления льда λ = 330 кДж/кг, удельная теплота испарения воды r = 2300 кДж/кг.

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Колонна автомашин длиной L = 2 км движется со скоростью v_1 = 36 км/ч. Из начала колонны выезжает мотоциклист, который, достигнув ее конца, возвращается обратно. Скорость мотоциклиста постоянна и равна v_2 = 54 км/ч. Какой пусть s пройдет мотоциклист, пока он нагонит начало колонны?

2. Для увеличения скорости тела, движущегося по гладкому горизонтальному столу, от значения v до значения $2v$ требуется совершить работу A = 3 Дж. Какую дополнительную работу A' надо совершить для увеличения скорости этого тела от значения $2v$ до значения $3v$? Тело движется не отрываясь от поверхности стола.

3. Определите суммарную кинетическую энергию $E_{\text{сум}}$ теплового поступательного движения молекул идеального газа в баллоне емкостью V = 10 л, находящегося под давлением $p = 4 \cdot 10^5$ Па .

4. Линии индукции однородного магнитного поля перпендикулярны плоскости кольца диаметром D = 20 см, изготовленного из медной проволоки диаметром d = 2 мм. С какой скоростью $\varphi = \Delta B / \Delta t$ должна изменяться во времени магнитная индукция B, чтобы сила индукционного тока в кольце равнялась I = 10 А? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}75 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м .

5. На какой угол δ отклонится луч света от первоначального направления, упав под углом $\alpha = 45^\circ$ из воздуха на поверхность стекла? Абсолютный показатель преломления стекла n = = 1,60. Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным 1. Здесь α − угол между падающим лучом и нормалью к поверхности стекла, проведенной в точке падения.

Вариант 2

(факультеты специальной техники и информационной безопасности)

1. Пассажир поезда заметил, что две идущие навстречу поезду электрички промчались мимо него с интервалом t_1 = = 6 мин. С каким интервалом t_2 прошли эти электрички мимо станции, если поезд, в котором находился пассажир, шел со скоростью v_1 = 100 км/ч, а скорость каждой из электричек v_2 = 60 км/ч?

2. Для увеличения деформации легкой пружины от нуля до величины l требуется совершить работу A = 1 Дж. Какую дополнительную работу A' надо совершить для увеличения деформации этой пружины от l до $2l$?

3. Чему равна средняя кинетическая энергия $E_{\text{ср}}$ теплового движения атомов аргона, если этот газ массой m = 2 кг, находясь в сосуде объемом $V = 2$ м^3, создает давление $p = 3 \cdot 10^5$ Па? Молярная масса аргона М = 0,040 кг/моль, число Авогадро $N_{\text{А}} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

4. Квадратная рамка со стороной a = 6,8 мм, сделанная из медной проволоки площадью поперечного сечения $S = 1$ мм^2, помещена в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям индукции. Индукция магнитного поля равномерно изменяется на величину $\Delta B = 2$ Тл за время Δt = 0,1 с. Чему равна при этом сила тока I в рамке? Удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м.

5. Луч света падает из воздуха на поверхность воды под углом $\alpha = 40°$. Под каким углом δ должен упасть луч из воздуха на поверхность стекла, чтобы угол преломления оказался таким же, как для воды? Абсолютный показатель преломления воды n_1 = = 1,33, стекла n_2 = 1,60. Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным 1. Здесь α и δ − углы между падающим лучом и нормалью к соответствующей поверхности, проведенной в точке падения.

Вариант 3

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Пригородный поезд отправляется строго по расписанию ровно в 12 часов дня по точным часам и движется с постоянным ускорением. Пассажир, часы которого отстают, выбегает на платформу ровно в 12 часов по своим часам и видит уже движущийся поезд, причем за время $t = 6$ с мимо него проходит один вагон, а за следующие $t = 6$ с − уже 2 вагона. На какой временной интервал τ отстают часы пассажира?

2. На гладком столе находится тело, прикрепленное к концу горизонтально расположенной пружины жесткостью $k =$ $= 0{,}05$ Н/м. Второй конец пружины закреплен неподвижно. Тело совершает малые гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см. В тот момент, когда скорость тела равна $v = 4$ см/с, смещение тела от положения равновесия ровно $x = 6$ см. Найдите массу тела m.

3. Идеальному одноатомному газу в количестве $\nu = 2$ моль сообщили количество теплоты $Q = 9{,}5$ кДж. При этом температура газа уменьшилась на $|\Delta T| =$ $= 200$ К. Найдите работа газа A в этом процессе. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К).

4. При разомкнутом и замкнутом ключе K на участке ab цепи (рис.3) выделяется одна и та же мощность. Найдите величину сопротивления R_x, если $R_0 = 28{,}2$ Ом, а напряжение на зажимах источника постоянно.

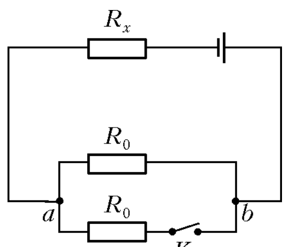


Рис. 3

5. Предельный угол полного внутреннего отражения при переходе светового луча из жидкости в воздух равен $\theta_{пр} = 30°$. Длина световой волны в воздухе $\lambda_в = 600$ нм. Найдите длину световой волны в жидкости $\lambda_ж$. Абсолютный показатель преломления воздуха считать равным 1.

Вариант 4

(факультеты прикладной математики и информационной безопасности)

1. Первый вагон поезда прошел мимо наблюдателя, стоящего на платформе, за время $t_1 = 1$ с, а второй − за время $t_2 = 1{,}5$ с. Длина вагона $l = 12$ м. Найдите ускорение поезда a. Движение поезда считать равнопеременным.

2. На гладком столе находится тело массой m = 0,6 кг, прикрепленное к концу горизонтально расположенной пружины жесткостью k = 0,15 Н/м. Второй конец пружины закреплен неподвижно. Тело совершает малые гармонические колебания, при этом максимальное значение скорости тела равно v_m = = 5 см/с. Найдите смещение x тела от положения равновесия в тот момент, когда скорость движения тела равна v = 4 см/с.

3. Идеальному одноатомному газу в количестве ν = 2 моль сообщили количество теплоты Q = 8400 Дж. В этом процессе газ совершил работу A = 4600 Дж. На какую величину ΔT изменилась при этом температура газа? Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К).

4. Два сопротивления по R = 100 Ом подключаются к источнику ЭДС сначала последовательно, а затем параллельно. В обоих случаях тепловая мощность, выделяемая на каждом сопротивлении, оказалась одной и той же. Найдите ЭДС источника $\mathcal{E}$, если ток, протекающий в цепи при последовательном включении сопротивлений, равен I = 1 А.

5. Луч света падает на плоскую поверхность раздела двух сред *1* и *2*, при этом угол падения $\alpha = 30°$, а угол преломления $\beta = 60°$. Длина световой волны в первой среде λ_1 = 350 нм. Найдите длину волны λ_2 во второй среде.

Публикацию подготовили А.Леденев, А.Пичкур

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФИЗИКА

Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»

Московский государственный институт электронной техники (МИЭТ) (технический университет) на протяжении многих лет проводит для учащихся одиннадцатых классов олимпиады по математике и физике, которые пользуются большой популярностью среди школьников Москвы и Московской области. Чтобы расширить круг участников, весной 2010 года МИЭТ провел олимпиаду по физике для учащихся 10–11 классов в заочной форме, используя интернет-технологии.

Олимпиада не содержала сверхсложных задач, которые могут решать только специально подготовленные школьники. Почти все задачи олимпиады допускают простые решения без громоздкой математики на основе знаний обычной школьной программы. Однако наряду с вполне стандартными задачами в заданиях олимпиады можно найти и новые, решения которых сразу не очевидны.

Олимпиада проходила в два тура. В олимпиаде приняли участие около 300 школьников из 49 различных населенных пунктов России и зарубежья.

Приглашаем всех желающих принять участие в олимпиаде «Поверь в себя!» весной 2011 года (http://www.abiturient.ru/, (499) 734-02-42, (499) 720-89-58).

Задачи первого тура олимпиады 2010 года

10 класс

1. Камень, брошенный с поверхности земли под углом $\alpha = 60°$ к горизонту со скоростью v = 20 м/с, упал на крышу дома через время t = 2 с. Определите высоту дома h. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 . Ответ округлите до целого.

2. Для определения величины силы магнитного взаимодействия намагниченной шайбы и железной плиты шайбу запускали с одной и той же начальной скоростью сначала по верхней поверхности горизонтально расположенной плиты, а затем по нижней поверхности (рис.1). Во сколько раз магнитная сила больше силы тяжести, если смещение шайбы при скольжении во втором случае в n = 2 раза больше, чем в первом?

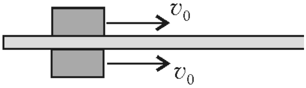


Рис. 1

3. Две шайбы в результате столкновения на гладком горизонтальном столе разлетелись в противоположных направлениях, как показано на рисунке 2. Найдите величину отношения скоростей шайб перед столкновением v_1/v_2, если их массы равны m_1 = 100 г и m_2 = = 200 г.

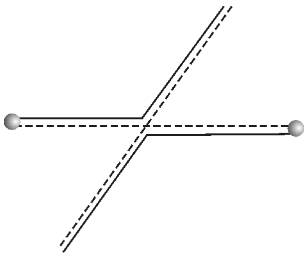


Рис. 2

4. В одном из двух баллонов содержится углекислый газ, а в другом – водород. Объемы, температуры и давления газов одинаковы. Во сколько раз изменится масса газа в баллоне, где первоначально был водород, если баллоны соединить тонкой трубкой? Молярная масса углекислого газа 44 г/моль, молярная масса водорода 2 г/моль.

5. В длинном цилиндрическом теплоизолированном сосуде (рис.3) находится 1 моль одноатомного идеального газа, удерживаемый поршнем массой m = 0,83 кг. На какую максимальную величину ΔT увеличится температура газа, если поршню сообщить начальную скорость v = = 3 м/с? Теплоемкостью поршня и сосуда пренебречь. Процесс считать квазистатическим. Универсальная газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль · К).

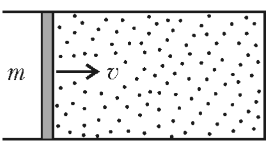


Рис. 3

6. Точечный заряд Q расположен посередине между зарядами $2q$ и $-q$ на одной с ними прямой. Определите отношение Q/q, при котором электрические силы, действующие на заряды $2q$ и $-q$ в этой системе, равны по величине.

7. На тонкое непроводящее кольцо радиусом R = 0,2 м надета бусинка массой m = 1 г и зарядом q = 1 мкКл. Кольцо помещено в однородное электрическое поле величиной $E = 10^4$ В/м, вектор напряженности которого $\vec{E}$ лежит в плоскости кольца (рис.4). Сначала бусинку удерживают в точке A на диаметре, перпендикулярном силовым линиям. Какую минимальную скорость v нужно сообщить бусинке в точке A, чтобы она совершила полный оборот по кольцу? Силами трения и тяжести пренебречь.

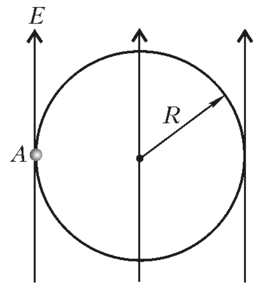


Рис. 4

8. Заряженный конденсатор подключили к источнику напряжения с ЭДС $\mathcal{E} = 10$ В. После перезарядки конденсатора его энергия оказалась равной первоначальной, а в цепи за время перезарядки выделилось количество теплоты Q = 0,4 мДж. Определите емкость C конденсатора (в мкФ).

9. Три одинаковых резистора, источник ЭДС, идеальный амперметр и идеальный вольтметр соединены, как показано на рисунке 5. Амперметр показывает ток I = 1 А, вольтметр показывает напряжение U = 30 В. Определите сопротивление каждого резистора.

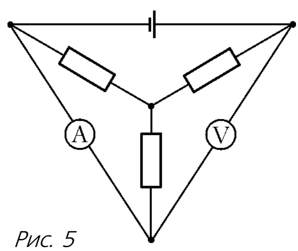


Рис. 5

10. Какую максимальную скорость v может приобрести автомобиль массой $m = 10^3$ кг, разгоняясь из состояния покоя в течение времени t = = 10 с, если коэффициент трения между дорогой и колесами μ = 0,5, а максимальная мощность двигателя автомобиля N = 200 кВт? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2. Ответ выразите в м/с, округлив до целого.

11 класс

1. Камень, брошенный с крыши дома под углом $\alpha = 30°$ вверх к горизонту со скоростью v_0 = 10 м/с, упал на землю через t = 3 с. Определите высоту дома h. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Спутник движется по эллиптической (вытянутой) орбите вокруг некоторой планеты. На расстоянии l_1 = 25000 км от центра планеты ускорение спутника равно $a_1 = 0{,}6$ м/с^2. С каким ускорением a_2 движется спутник на расстоянии l_2 = = 50000 км от центра планеты?

3. Игрушечная пушка на колесиках (рис.6), первоначально покоившаяся на горизонтальном полу, выстреливает шарик,

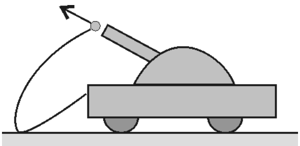


Рис. 6

привязанный к пушке легкой ниткой (чтобы не потерялся). При выстреле нитка обрывается, и шарик падает на пол со скоростью v = 6 м/с под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определите скорость пушки v после обрыва нити, если масса пушки в 30 раз больше массы шарика. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь. Векторы скорости шарика и пушки лежат в одной плоскости.

4. На сколько процентов изменится масса воздуха в открытой бутылке, если ее вынести из комнаты на улицу? Температура в комнате $t_1 = 22$ °С , на улице $t_2 = -23$ °С .

5. На рисунке 7 изображена одна из линий напряженности электрического поля двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 . Известно, что q_1 = 1 нКл. Определите q_2 (в нКл).

Рис. 7

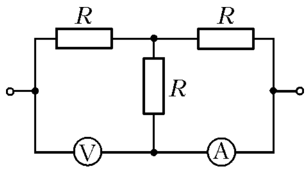


Рис. 8

6. Сопротивление каждого резистора в приведенной на рисунке 8 схеме равно R = 100 Ом, показание амперметра I = 10 мА. Какое напряжение U показывает вольтметр? Амперметр и вольтметр считайте идеальными.

7. Призма с преломляющим углом $\varphi = 15°$ лежит на плоском зеркале (рис.9). Луч света падает на верхнюю грань призмы под углом падения $\alpha = 60°$, а выходит из нее перпендикулярно верхней грани. Определите показатель преломления n материала, из которого сделана призма. Ответ округлите до первого знака после запятой.

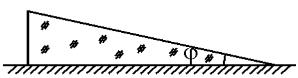


Рис. 9

8. К вертикальной железной стене «прилипла» намагниченная шайба. К шайбе привязана легкая нить, за которую тянут так, что нить все время остается параллельной стене. Когда нить тянут вертикально вверх, шайба начинает двигаться при минимальной силе F_1 = 2 Н, когда нить тянут вертикально вниз, шайба приходит в движение при силе F_2 = 0,5 Н. С какой минимальной силой F нужно тянуть нить в горизонтальном направлении, чтобы сдвинуть шайбу?

9. Крылатая ракета, атакуя корабль противника, совершает горизонтальный полет на низкой высоте с постоянной по величине скоростью $v_1 = 400$ м/с. Система наведения ракеты устроена так, что вектор ее скорости все время направлен на цель. На расстоянии $L = 800$ м от корабля векторы скорости ракеты и корабля оказались взаимно перпендикулярными (рис.10). Определите ускорение a ракеты в этот момент, если скорость корабля $v_2 = 72$ км/ч.

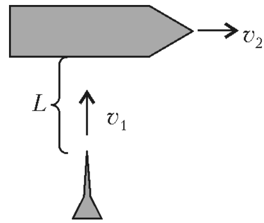


Рис. 10

10. В катушке индуктивностью $L = 100$ мГн протекает постоянный ток. Сопротивление провода, которым намотана катушка, равно $R = 20$ Ом. В некоторый момент времени ток в катушке начинают равномерно уменьшать, и через время $\tau = 10$ мс после этого он становится равным нулю. Через какое время t после начала уменьшения тока напряжение на катушке станет равным нулю? Ответ выразите в миллисекундах.

Задачи второго тура олимпиады 2010 года

10 класс

1. Рыбак, стоящий на берегу реки, роняет в воду грузило, и от него по воде начинают расходиться волны. Через какое время t волны от грузила достигнут точки, расположенной напротив рыбака на противоположном берегу реки? Скорость течения реки $u = 0{,}5$ м/с, скорость волн в стоячей воде $v = 1{,}5$ м/с, ширина реки $d = 28$ м. Ответ округлите до целого числа секунд.

2. В некоторый момент времени ускорение возвращающегося на Землю космического корабля вблизи ее поверхности направлено горизонтально, а величина ускорения равна $a = \sqrt{3}g$. Под каким углом φ к поверхности Земли движется корабль в этот момент времени, если сила сопротивления воздуха направлена против вектора скорости корабля? Ответ выразите в градусах.

3. Однородный шар радиусом $R = 5$ см подвешен к горизонтальному потолку на нерастяжимой нити. Шар раскрутили вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса так, что он стал двигаться по окружности, упираясь в потолок (рис.11). При каком максимальном периоде T обращения

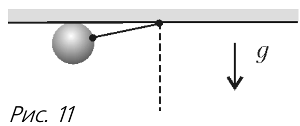


Рис. 11

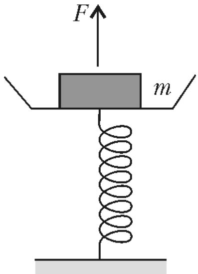


Рис. 12

шара возможно такое движение? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 . Ответ округлите до сотых долей секунды.

4. На чашке пружинных весов лежит гиря массой $m = 1$ кг, при этом деформация пружины равна $l = 3$ см. Какую работу A нужно совершить, чтобы медленно снять гирю с весов, прикладывая к ней вертикальную силу (рис.12)? Массой чашки весов пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 .

5. Старинную монету взвесили дважды: сначала в воздухе, а затем погрузив монету полностью в воду. Вес монеты оказался равным $P_1 = 100$ мН и $P_2 = 90$ мН. Определите плотность металла, из которого сделана монета.

6. Тяжелый поршень площадью $S = 9$ см^2 , медленно опускаясь, вытесняет воздух из цилиндрического сосуда объемом V через маленькое отверстие в дне в сосуд такого же объема (рис.13). Начальное давление воздуха в обоих сосудах равно $p_0 = 10^5$ Па. При какой массе m поршня произойдет полное вытеснение воздуха из первого сосуда, если температура воздуха в сосудах одна и та же и не меняется при движении поршня? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 .

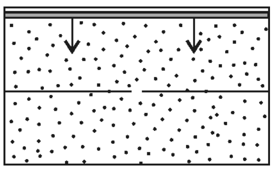


Рис. 13

7. Одноатомный идеальный газ совершил одну и ту же работу сначала в адиабатном, а затем в изобарном процессе. Найдите изменение температуры ΔT_2 газа в изобарном процессе, если в адиабатном процессе температура газа изменилась на $\Delta T_1 = -10$ К .

8. На невесомую нерастяжимую нить длиной $l = 20$ см, концы которой закреплены в одной точке, нанизаны два маленьких проводящих шарика массой $m = 1$ г каждый, которые могут без трения скользить по нити (рис.14). Какой заряд q нужно сообщить шарикам, чтобы после установления равновесия нити разошлись на угол $\alpha = \pi/2$? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2 , электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Ответ выразите в мкКл, округлив число до десятых долей.

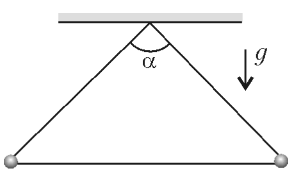


Рис. 14

9. Два заряженных конденсатора емкостью C = 1000 мкФ каждый, вольтметр и ключ соединены, как показано на рисунке 15. Какое количество теплоты Q выделится в цепи после замыкания ключа, если максимальное напряжение, зафиксированное вольтметром, равно U = 4 В? Ответ выразите в мДж.

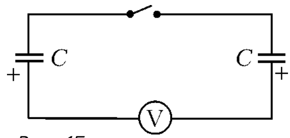


Рис. 15

10. В схеме, изображенной на рисунке 16, ЭДС источника $\mathcal{E}$ = 10 В, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало, сопротивление каждого из резисторов R = 6 Ом. Определите ток I через источник.

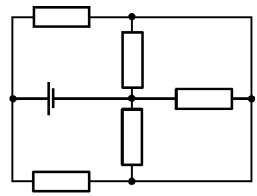


Рис. 16

11 класс

1. С какой скоростью нужно бросить с вышки камень, чтобы пройденный им за время t = 2 с путь был минимальным? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. На легкой вертикальной пружине закреплена подставка массой M = 2 кг, на подставке лежит груз массой m = 3 кг (рис.17). Система находится в равновесии. Какую минимальную силу F нужно приложить к грузу, чтобы сразу оторвать его от подставки? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

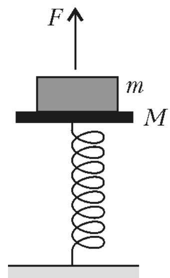


Рис. 17

3. На гладком горизонтальном столе покоятся две одинаковые шайбы, соединенные легкой недеформированной пружиной. Одной из шайб сообщают горизонтальную скорость $v_1 = 2\sqrt{2}$ м/с. Через некоторое время вектор скорости этой шайбы повернулся в горизонтальной плоскости на угол $\alpha = 45°$, а по величине скорости шайб сравнялись. Найдите для этого момента времени скорости шайб v_2.

4. В циклическом процессе *1–2–3–4–1*, график которого изображен на рисунке 18, идеальный газ получает от нагревателя за один цикл коли-

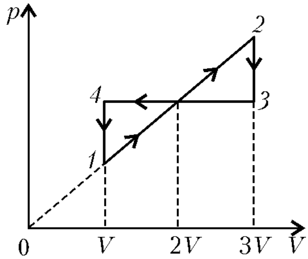


Рис. 18

чество теплоты $Q_1 = 400$ Дж. Какое количество теплоты Q_2 газ за цикл отдает холодильнику?

5. Точечный заряд q_1 закреплен в вершине A правильного треугольника ABC, а точечный заряд q_2 находится на большом расстоянии от этого треугольника. Когда заряд q_2 поместили в вершину B, направление вектора напряженности электрического поля этих зарядов в вершине C изменилось на $90°$. Определите отношение q_2/q_1.

6. Два заряженных конденсатора емкостью $C = 5000$ мкФ каждый, амперметр сопротивлением $R = 1000$ Ом и ключ соединены, как показано на рисунке 19. Какое количество теплоты Q (в мДж) выделится в цепи после замыкания ключа, если максимальный ток, зафиксированный амперметром, равен $I_m = 2$ мА?

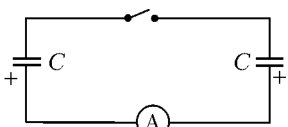


Рис. 19

7. Частица с удельным зарядом $q/m = 0{,}96 \cdot 10^8$ Кл/кг попадает в область однородного магнитного поля, перпендикулярного вектору скорости частицы и ограниченного цилиндрической поверхностью радиусом $r = 5$ см (рис.20). Чему равен модуль B вектора индукции магнитного поля, если частица отклонилась магнитным полем на угол $\alpha = 90°$? На границе магнитного поля вектор скорости частицы направлен вдоль радиуса цилиндрической поверхности, а модуль вектора скорости равен $v_0 = 0{,}48 \cdot 10^6$ м/с.

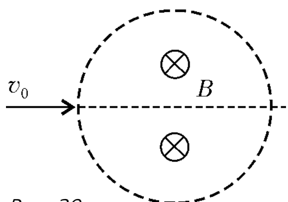


Рис. 20

8. На горизонтальном столе в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл закреплено проволочное кольцо радиусом $R = 5$ см с узким разрезом (рис.21). По кольцу перемещают тонкий металлический стержень с постоянной скоростью $v = 1$ м/с, перпендикулярной стержню. Найдите максимальную величину ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ в замкнутом проводящем контуре, образованном кольцом и стержнем.

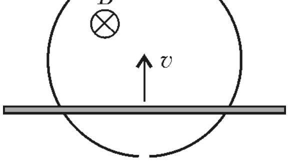


Рис. 21

9. Человек ростом $H_1 = 1{,}8$ м видит верхушку столба высотой $H_2 = 5{,}4$ м в небольшом зеркальце, лежащем горизонтально на земле на расстоянии $l = 1$ м от человека. Постройте ход лучей и определите, на каком расстоянии L от столба стоит человек.

10. Во сколько раз максимальный импульс электрона, выбиваемого светом из металла при фотоэффекте, отличается от импульса фотона? Длина волны света $\lambda = 0{,}6$ мкм, работа выхода электронов из металла в 2 раза меньше энергии фотона. Ответ выразите через величину $\lambda_c = h/(mc) = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$ м, где h − постоянная Планка, m − масса электрона, c − скорость света в вакууме.

Публикацию подготовили А.Берестов, Г.Гайдуков,
И.Горбатый, С.Куклин

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ФИЗИКА

Олимпиада-2010

Тур 1

Вариант 1

1. Точка движется по оси x по закону $x = 5 + 4t - 2t^2$ (м). Определите величину скорости точки при t = 1 с.

2. Пятая часть однородной линейки, имеющей массу m и длину L, выступает за край стола (рис.1). Найдите минимальную величину силы F, которую необходимо приложить, чтобы сдвинуть линейку с места. Коэффициент трения между линейкой и столом равен μ.

Рис. 1

3. Тело массой m брошено с высоты h под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0 (рис.2). Определите количество теплоты, которое выделится при падении тела на землю. Удар считать абсолютно неупругим.

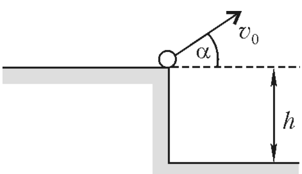


Рис. 2

4. Определите внутреннюю энергию неона, находящегося в баллоне объемом $V = 3 \cdot 10^{-2}$ м^3 под давлением $p = 2 \cdot 10^5$ Па.

5. Напишите уравнение гармонического колебательного движения с амплитудой A = 0,1 м, периодом T = = 4 с и начальной фазой, равной $\pi/4$.

6. Как нужно изменить расстояние между точечными положительными зарядами, чтобы при увеличении каждого из зарядов в 4 раза сила взаимодействия между ними не изменилась?

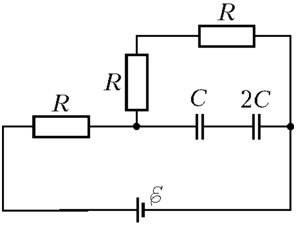


Рис. 3

7. Конденсаторы с емкостями C и $2C$ и резисторы, сопротивления которых равны R, включены в электрическую цепь, как показано на рисунке 3. Найдите установившийся заряд на конденсаторе емкостью C, если ЭДС источника тока равна $\mathcal{E}$, а его внутренним сопротивлением можно пренебречь.

8. Температура десяти молей идеального газа меняется по закону $T = \alpha V^2$, где константа $\alpha = 2\ \text{К}/\text{м}^6$. Найдите работу, совершенную газом при увеличении объема от $V_1 = 30\ \text{дм}^3$ до $V_2 = 50\ \text{дм}^3$.

9. Тело движется по прямой. Под действием постоянной силы $F = 4$ Н за время $\Delta t = 2$ с импульс тела увеличился и стал равным $p_2 = 20\ \text{кг} \cdot \text{м/с}$. Определите первоначальный импульс тела p_1 .

10. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m (рис.4). Шины замкнуты на сопротивление R. Расстояние между шинами L. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной к плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивления шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найдите установившуюся скорость перемычки.

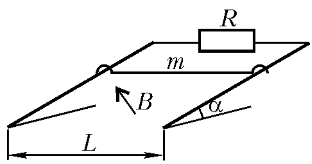


Рис. 4

Вариант 2

1. Тело массой $m = 1$ кг движется по оси x по закону $x = 5 + 4t - 2t^2$ (м) . Определите величину импульса тела в момент времени $t = 1$ с.

2 Груз массой $m = 1$ кг подвешен на пружине жесткостью $k = 100$ Н/м. В положении равновесия грузу толчком сообщают в вертикальном направлении скорость $v = 1$ м/с. Определите модуль максимального ускорения груза при его дальнейшем движении.

3. Однородный стержень массой m закреплен одним концом с помощью шарнира на горизонтальной плоскости и удерживается за второй конец под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с помощью невесомой нерастяжимой нити, расположенной под таким же углом α к вертикали. Найдите силу натяжения нити.

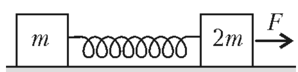


Рис. 5

4. На горизонтальной плоскости лежат два бруска, массы которых m

и $2m$, соединенные ненапряженной пружиной (рис.5). Какую наименьшую постоянную силу F, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массой $2m$, чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость равен μ.

5. Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль сначала охладили, а затем нагрели до первоначальной температуры 300 К, увеличив при этом объем газа в 3 раза (рис.6). Найдите количество теплоты, отданное газом на участке *1–2*.

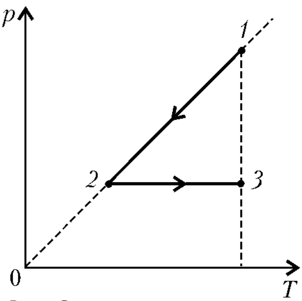


Рис. 6

6. В точках A, C, D расположены неподвижные точечные заряды $+2q$, $+q$, $-6q$, как показано на рисунке 7.

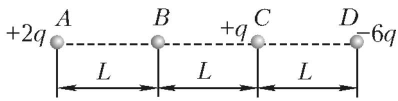


Рис. 7

Определите работу сил поля при перемещении заряда $+q$ из бесконечности, где потенциал электрического поля принимается равным нулю, в точку B.

7. В электрической цепи, схема которой показана на рисунке 8, установившееся напряжение на конденсаторе равно U = 20 В. Считая параметры элементов схемы известными, определите величину ЭДС источника тока. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

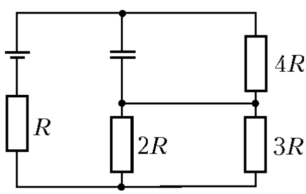


Рис. 8

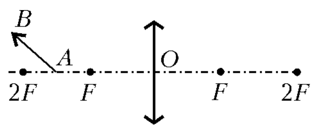


Рис. 9

8. Постройте изображение предмета AB в собирающей линзе (рис.9).

9. При фотоэффекте максимальный импульс, передаваемый поверхности вольфрамовой пластинки при вылете каждого электрона, равен $p = 3{,}45 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с. Найдите энергию квантов применяемого облучения. Работа выхода для вольфрама равна A = 4,5 эВ.

10. Из проволоки с общим сопротивлением R сделан плоский замкнутый контур, состоящий из двух квадратов со сторонами a и $2a$ (рис.10). Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной B и направленной перпендикулярно плоскости контура. Найдите заряд, который протечет через поперечное сечение провода при равномерном уменьшении индукции поля до нуля. Между пересекающимися на рисунке проводами электрический контакт отсутствует.

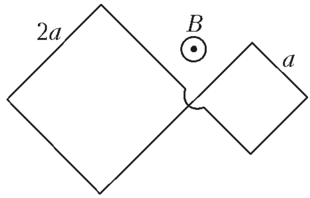


Рис. 10

Тур 2

Вариант 3

1. Из верхней точки окружности A одновременно начинают двигаться две одинаковые бусинки. Одна бусинка падает вдоль диаметра AD, другая скользит по абсолютно гладкой спице AB, вписанной в окружность и составляющей угол $\alpha = 60°$ с вертикалью AD. Найдите отношение времени, за которое первая бусинка достигнет точки D, ко времени, за которое вторая бусинка достигнет точки B.

2. Однородный стержень длиной L и массой m шарнирно закреплен в точке O (рис.11). Середина стержня опирается на пружину. На стержне закреплены два маленьких груза массами $2m$ и m, положения которых показаны на рисунке. Найдите силу упругости, возникающую в пружине в положении равновесия стержня, если в этом положении стержень расположен горизонтально. Массой пружины и силами трения пренебречь.

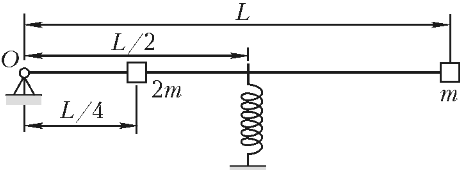


Рис. 11

3. Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна $v_0 = 200$ м/с . В точке максимального подъема снаряд разорвался на два одинаковых осколка. Первый осколок упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в два раза больше начальной скорости снаряда. На какую максимальную высоту поднялся второй осколок? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Вокруг горизонтальной оси O может свободно вращаться легкий рычаг, плечи которого равны $2L$ и L (рис.12). На концах

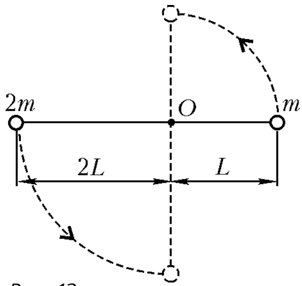


Рис. 12

рычага укреплены грузы, массы которых $2m$ и m. Первоначально рычаг удерживается в горизонтальном положении, как показано на рисунке. Затем рычаг отпускают без начальной скорости. Определите линейные скорости грузов в момент прохождения стержнем положения равновесия.

5. Теплоизолированный сосуд разделен пористой неподвижной перегородкой на две части. Атомы гелия могут свободно проникать через поры в перегородке, а атомы аргона – нет. В начальный момент в одной части сосуда находится $\nu_1 = 2$ моль гелия, а в другой – $\nu_2 = 1$ моль аргона. Температура гелия $T_1 = 300$ К, а температура аргона $T_2 = 600$ К. Считая аргон и гелий идеальными газами, определите температуру гелия после установления равновесия в системе.

6. Три положительных точечных заряда $+q$, $+q$ и $+2q$, связанных между собой нитями, расположены в вершинах правильного треугольника со стороной a. После разрыва одной из нитей заряды расположились вдоль одной прямой, как показано на рисунке 13. Найдите работу сил электрического поля, необходимую для такой перестройки системы расположения зарядов.

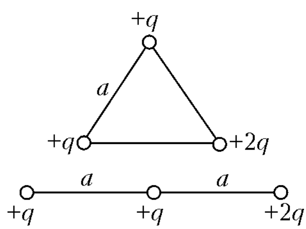


Рис. 13

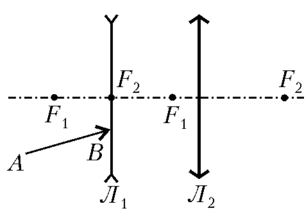


Рис. 14

7. Оптическая система состоит из рассеивающей линзы $Л_1$ и собирающей линзы $Л_2$ с общей главной оптической осью (рис.14). Главные фокусы рассеивающей линзы обозначены F_1, а собирающей линзы – F_2. Постройте дальнейший ход луча AB через оптическую систему.

8. Найдите максимальный заряд, который может накопиться на удаленном от других тел медном шарике радиусом $r = 3$ см при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны

λ = 0,14 мкм. Работа выхода для меди равна A = 4,47 эВ.

9. В схеме, показанной на рисунке 15, перед замыканием ключа K батарея, состоящая из двух одинаковых конденсаторов емкостью C каждый, не была заряжена. Ключ замыкают на некоторое время, в течение которого конденсаторы заряжаются до напряжения U. Определите, какое количество теплоты выделится за это время на резисторе сопротивлением R_1. ЭДС источника тока равна $\mathcal{E}$, его внутренним сопротивлением пренебречь.

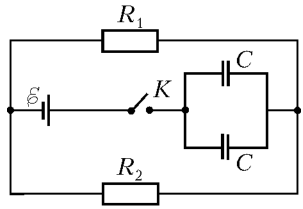


Рис. 15

10. Горизонтальный контур образован двумя замкнутыми на катушку индуктивностью L параллельными проводниками, находящимися на расстоянии h друг от друга (рис.16). По проводникам без трения может скользить перемычка. Контур помещен в вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B. В начальный момент времени неподвижной перемычке сообщают скорость v_0. Определите массу перемычки и время τ, за которое скорость перемычки уменьшится в два раза, если известно расстояние s, которое пройдет перемычка до первой остановки. Сопротивлением всех элементов контура пренебречь.

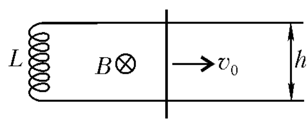


Рис. 16

Вариант 4

1. Северный полюс магнита удаляется с некоторой скоростью от металлического кольца, двигаясь вдоль его оси перпендикулярно плоскости кольца (рис. 17). Каково направление индукционного тока в кольце? Ответ поясните.

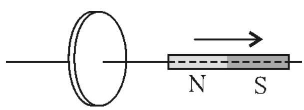


Рис. 17

2. На столе лежат стопкой 10 одинаковых книг. В каком случае нужно приложить меньшую силу: чтобы сдвинуть семь верхних книг или вытянуть из стопки шестую книгу сверху? Ответ обоснуйте.

3. Открытый бак, состоящий из двух соосных цилиндров диаметрами d и $2d$, заполнен жидкостью плотностью ρ, как показано на рисунке 18. Бак стоит на полу лифта, который опускается вниз с ускорением a = 0,25g. Определите силу

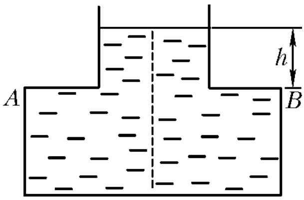


Рис. 18

давления жидкости на горизонтальную поверхность AB, соединяющую оба цилиндра. Атмосферное давление равно p_0 .

4. Груз массой m подвешен через пружину жесткостью k на нити, перекинутой через блок и соединенной с бруском массой $M = 4m$, лежащим на горизонтальной плоскости (рис.19). В начальный момент груз удерживается так, что пружина находится в ненапряженном состоянии, затем его отпускают без начальной скорости. Найдите минимальное значение коэффициента трения между бруском и горизонтальной плоскостью, при котором он еще будет оставаться неподвижным. Массой пружины, нити, блока и трением в нем пренебречь.

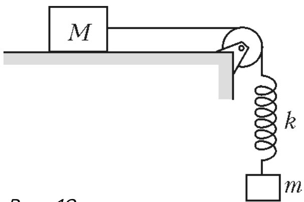


Рис. 19

5. Один моль идеального одноатомного газа сначала изотермически расширился при температуре $T_1 = 300$ К (рис.20). Затем газ охладили при постоянном объеме, понизив давление в 3 раза по сравнению с давлением в точке *2*. Найдите количество теплоты, которое газ отдал на участке *2–3*.

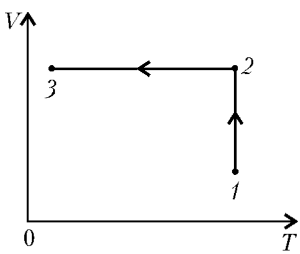


Рис. 20

6. По кольцу радиусом R равномерно распределен заряд q. Определите потенциал в точке, находящейся на оси, перпендикулярной плоскости кольца, и отстоящей от центра кольца на $h = 2R$.

7. Предмет AB располагается перед собирающей линзой, как показано на рисунке 21,*а*. Линзу разрезали по оси OO_1. Верхнюю половину линзы удалили, а нижнюю половину сдвинули вниз по отношению к предмету, как показано на рисунке 21,*б*. Постройте изображение предмета в оставшейся нижней половине линзы.

8. Найдите максимальный потенциал, до которого может зарядиться удаленный от других тел серебряный шарик при облучении его электромагнитным излучением с длиной волны $\lambda = 0{,}12$ мкм. Работа выхода для серебра равна $A = 4{,}28$ эВ.

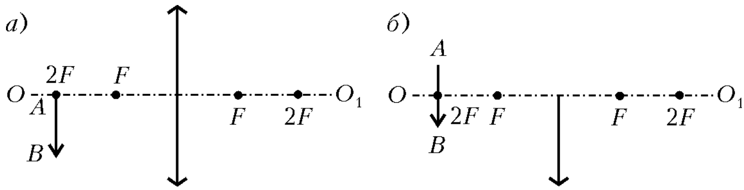


Рис. 21

9. В электрической цепи, представленной на рисунке 22, ключ K в начальный момент замкнут и по цепи идет постоянный ток. Какое количество теплоты выделится в резисторе сопротивлением R_2 после размыкания ключа? Параметры элементов цепи таковы: индуктивность катушки L, сопротивления $R_1 = 2R$, $R_2 = R$, $R_3 = R/3$, ЭДС источника тока $\mathscr{E}$. Активным сопротивлением катушки и сопротивлением источника тока пренебречь.

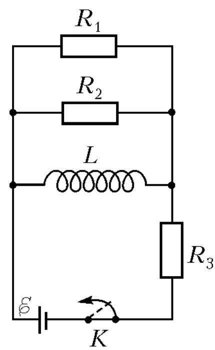


Рис. 22

10. На гладкой горизонтальной поверхности массивной плиты покоится клин массой M. На грань, составляющую с горизонтом угол α, вертикально падает шарик массой m и ударяется о клин со скоростью v_0. В результате клин начинает двигаться по плите. Определите скорость клина после удара. Время удара мало, удар считать абсолютно упругим.

Публикацию подготовил Ю.Струков

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Дополнительное вступительное испытание

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^y = 4^x + 8, \\ y = \dfrac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

3. Найдите наименьшее из положительных значений функции

$$\frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1}.$$

4. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABC = \dfrac{\pi}{12}$, $BC = 5$, $2AC > AB$, а медиана CD образует со стороной AC угол величиной $\dfrac{5\pi}{12}$.

5. Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк все время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

6. В основании параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = 4$, боковые ребра параллелепипеда AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны основанию и равны 1. Сфера касается прямой DC_1 в точке C_1, прямой DB_1 в точке, лежащей внутри отрезка DB_1, и проходит через точку D_1. Найдите радиус сферы.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. В арифметической прогрессии первый член отрицательный и равен −405, разность равна 18. Сумма абсолютных величин (модулей) первых n членов этой прогрессии равна 5661. Найдите n.

2. Решите неравенство

$$\frac{1+\log_{x-2}\left(-x^2+7x-10\right)}{2-\log_{5-x}\left(x^2-4x+4\right)} \le 2 .$$

3. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}^2\left(5x+\sin^2 y\right)+\left|\frac{5x+\cos 2y}{3}+\frac{3}{5x+\cos 2y}\right| = 4\cos^2\frac{7\pi}{4} .$$

4. В четырехугольнике $ABCD$ диагональ AC длины 9 является биссектрисой острого угла BAD и делит четырехугольник на 2 треугольника с площадями $6\sqrt{2}$ и $12\sqrt{2}$. Этот четырехугольник вписан в окружность. Найдите ее радиус.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 64\cdot 25^{-\sqrt{y}}+(8-40a)\cdot 5^{-\sqrt{y}}-5a \le 0, \\ 40\cdot 5^{-\sqrt{y}} = 80\cdot 2^x+5a+a\cdot 2^{-x} \end{cases}$$

имеет решение.

6. Основанием четырехугольной пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $AD = 3$. Высота пирамиды длиной $\dfrac{12}{\sqrt{23}}$ падает в точку пересечения диагоналей прямоугольника $ABCD$. Плоскость проходит через точку A, параллельна прямой BD, касается шара радиуса 1 с центром в точке S и пересекает ребро SC. В каком отношении она делит это ребро?

Вариант 3

(факультеты: наук о материалах, биоинформатики и биоинженерии, экономический (отделение экономики))

1. Решите уравнение

$$\left|-4^x + 2^{x+5} - 150\right| = 150 .$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x-y)\sqrt{y+1} = 0, \\ \sqrt{x^2 + 6x + y + 10} = -y^2 - 8y + x + 2. \end{cases}$$

3. а) Решите уравнение

$$\frac{9(\sin x + \cos x)^2}{\cos 2x} + \frac{32(1 + 7\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} 4x)}{\operatorname{tg} x + 7\operatorname{tg} 4x} + 7 = 0 .$$

б) Найдите сумму всех корней этого уравнения, принадлежащих отрезку $[0; 120\pi]$, и выясните, что больше: эта сумма или число 23040.

4. В четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Каждая его диагональ делит его площадь в отношении $2:3$. Найдите тангенсы всех углов четырехугольника $ABCD$ и радиус окружности, описанной около четырехугольника, если наибольшая сторона его имеет длину 24.

5. Решите неравенство

$$4 + \cos x \log_3 x \log_4 81 + \sin^2 x \log_2 x^8 \le 2\cos x - 4\cos 2x + \log_{\sqrt{2}} x^4.$$

6. Найдите все значения x, при которых наименьшее из чисел $(x+1)^3$ и $x^2 - 3x - 2$ меньше наименьшего из чисел $x^3 + 3x^2 + 2x + 2$ и $x^2 + 5x + 4$.

Вариант 4

(геологический факультет, Высшая школа государственного аудита, Высшая школа бизнеса, Высшая школа современных социальных наук, Московская школа экономики, социологический факультет, факультет государственного управления, экономический факультет (отделение менеджмента и вечернее отделение))

1. Докажите, что при

$$a = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

число $6a - a^3$ – целое, и найдите это число.

2. Спортсмены Иванов и Петров участвовали в марафоне. Первую половину пути Иванов бежал в два раза быстрее Петрова. Потом он подвернул ногу и оставшуюся половину пути бежал в два раза медленнее Петрова. Петров же все время бежал с постоянной скоростью и пробежал всю дистанцию за 4 часа. Сколько времени понадобилось Иванову, чтобы добраться до финиша?

3. Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}2\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, а $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) < 0$.

4. Решите неравенство

$$4^{\log_9\left(x^2+4x-5\right)} \le 2^{\log_3\left(1+8x-x^2\right)}.$$

5. В трапеции $ABCD$ основание AD в полтора раза длиннее основания BC, а длины боковых сторон AB и CD равны. На стороне BC взята такая точка K, что $BK = 2KC$. Прямые AK и CD пересекаются в точке E, а прямые DK и AB − в точке F. Найдите величину отношения $BF : CE$.

6. Найдите наименьшее и наибольшее значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{x-a} + \sqrt{x^3+1} = 2$$

имеет хотя бы одно решение.

Вступительное испытание (вместо ЕГЭ)

Вариант 1

1. Представьте число

$$\frac{1}{11} + \frac{1}{29} - 0{,}125$$

в виде несократимой обыкновенной дроби.

2. Решите неравенство

$$\frac{x+7}{x+1} \le x+3.$$

3. Между пунктами A и $Б$, расположенными на берегу озера, курсирует катер. На сколько процентов увеличится время в пути из пункта A в пункт $Б$, если скорость катера уменьшится на 20%?

4. Решите уравнение

$$3\log_8(x+1) = \log_2\sqrt{2x+5}.$$

5. Стороны треугольника равны 3, 5, 7. Найдите величину большего из углов треугольника.

6. Решите неравенство

$$2 \cdot 3^x + 3^{1-x} \le 7 .$$

7. Параллелограмм, одна из сторон которого равна 3, описан вокруг окружности радиуса 1. Найдите площадь параллелограмма.

8. Решите уравнение

$$2\sin^4 x + 7\cos^3 x = 2 .$$

9. Даны две окружности радиусов 2 и 3. Прямая касается обеих окружностей и пересекает отрезок, соединяющий их центры. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние между центрами равно 7.

10. Студент Василий добирался от железнодорожной станции до деревни Бабушкино. Он доехал на автобусе до поселка Дедушкино, где встретил знакомого, который за 10 минут подвез его до деревни на своей машине. Машина ехала в полтора раза быстрее автобуса. Когда пришло время уезжать, Василий за час доехал на велосипеде до поселка Дедушкино, а оттуда на такси доехал до станции. Такси ехало в 6 раз быстрее велосипеда, и в итоге Василий на обратную дорогу от деревни до станции потратил ровно столько же времени, сколько потребовалось, чтобы добраться от станции до деревни. Сколько времени ушло у Василия на дорогу в один конец?

11. В основании правильной пирамиды $ABCDS$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Через середины ребер AD, BC и CS проведена плоскость. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если длины боковых ребер пирамиды равны 7.

12. Найдите все целые положительные числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$y^3 = x^3 + 9x^2 + 17 .$$

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{2}{x-2} \le \frac{3}{x+1} .$$

2. Вчера лекарство в аптеке подорожало на 12%. Сколько стоило это лекарство до подорожания, если сегодня, после снижения цены на 5%, оно стоит 133 рубля?

3. Решите уравнение

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{1+2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3-x} .$$

4. Найдите площадь треугольника ABC, если его сторона BC равна 4, а углы A и B равны соответственно $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{8}$.

5. Найдите рациональное число, равное выражению

$$\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}\,\log_{\sqrt[3]{2}}\sqrt{3}\,.$$

6. На плоскости расположен отрезок AB длины 24 и две точки P, Q. Точка P равноудалена от A и B на расстояние 15, а точка Q также равноудалена от A и B, но на расстояние 20. Найдите длину отрезка PQ, если известно, что она меньше длины отрезка AB.

7. Из деревни Аниково в деревню Волково вышел пешеход. Через 20 минут ему вслед выехал велосипедист и приехал в Волково на 5 минут раньше пешехода. Какую долю пути прошел пешеход к моменту встречи с велосипедистом, если они все время двигались с постоянными скоростями?

8. Из точки, взятой на окружности, проведены две хорды, образующие угол в 45°. Длина отрезка, соединяющего середины этих хорд, равна 2. Найдите длину радиуса окружности.

9. Решите уравнение

$$\frac{\cos x+\sin 2x}{\cos 3x}=1\,.$$

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x^2+xy=8x-3y,\\ y^2+2xy=3x-2y.\end{cases}$$

11. Ребра куба равны 1. Найдите расстояние между серединами его скрещивающихся ребер.

12. Найдите все положительные числа x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_3(x+1)\cdot\log_2\left(x^2+3x+6\right)\le 4\,.$$

ФИЗИКА

В 2010 году олимпиада «Ломоносов» и профильный экзамен по физике в МГУ впервые проводились в письменной форме. Типовое задание для абитуриента охватывало все основные разделы программы по физике для поступающих в МГУ: 1) механику, 2) молекулярную физику и термодинамику, 3) электродинамику, 4) оптику. По каждому разделу программы абитуриенту предлагались краткий вопрос по теории и дополняющая его задача. На выполнение всего задания отводилось четыре астрономических часа.

Ниже приводятся примеры заданий олимпиады и профильного экзамена, сгруппированные по разделам программы.

Механика

Задание 1

Вопрос. Дайте определение центра масс системы материальных точек. Запишите формулу для импульса системы материальных точек.

Задача. Вырезанную из однородного листа металла пластинку в форме равностороннего треугольника ABC (рис.1) положили на гладкую горизонтальную плоскость и толкнули. В момент времени $t = 0$ оказалась, что скорость $\vec{v}_A$ вершины A этого треугольника перпендикулярна биссектрисе угла BAC, а скорость вершины C направлена вдоль стороны AC. Определите перемещение $\Delta\vec{r}$ центра треугольника за время τ после указанного момента.

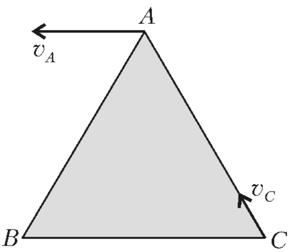


Рис. 1

Задание 2

Вопрос. Что такое трение покоя и трение скольжения? Дайте определение коэффициента трения.

Задача. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтальной поверхностью угол α, покоится брусок. Его можно сдвинуть с места силой $\vec{F}_0$, направленной вдоль наклонной плоскости вверх, либо силой $\vec{F}_1$, направленной горизонтально перпендикулярно направлению силы $\vec{F}_0$, причем $F_1 = kF_0$. Определите коэффициент трения бруска о наклонную плоскость μ, если $k = 0{,}2$, а $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}3$.

Задание 3

Вопрос. Дайте определение упругих деформаций. Сформулируйте закон Гука.

Задача. Колесо состоит из тонкого обода массой M и радиусом R и радиально расположенных спиц, соединяющих обод с втулкой, в которую вставлена ось (рис.2). На одну из спиц надета легкая пружина жесткостью k, один конец которой закреплен на втулке. К другому концу пружины прикреплен маленький шарик массой m, также надетый на спицу. В недеформированном состоянии длина пружины равна l ($l < R$). Колесо располагают горизонтально и закрепляют ось вращения. Какую работу A нужно совершить, чтобы медленно раскрутить колесо до такой угловой скорости, при которой шарик коснется обода? Считайте, что спицы гладкие и невесомые. Трением в оси и диаметром втулки можно пренебречь.

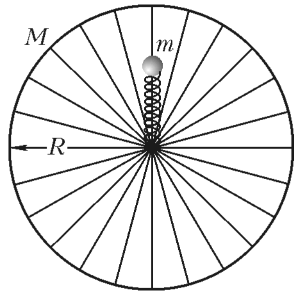


Рис. 2

Задание 4

Вопрос. Дайте определение равнопеременного прямолинейного движения. Приведите зависимости координаты и скорости тела от времени при равнопеременном движении.

Задача. К потолку покоящейся кабины лифта на пружине жесткостью k = 10 Н/м подвешена гиря массой m = 1 кг. В некоторый момент времени лифт начинает движение вверх с постоянным ускорением $a = 1$ м/с^2. Какой путь s пройдет кабина относительно шахты лифта к тому моменту, когда длина пружины в первый раз станет максимальной?

Задание 5

Вопрос. Дайте определение гармонических колебаний. Что такое амплитуда и фаза гармонических колебаний?

Задача. Математический маятник отклонили от положения равновесия на малый угол $\alpha_0 = 1$ рад и отпустили без начальной скорости, после чего маятник стал совершать гармонические колебания. Найдите максимальное значение $v_{y\,\max}$ модуля вертикальной составляющей скорости маятника. Длина маятника l = 0,4 м. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2 .

Задание 6

Вопрос. Дайте определение периода колебаний. Запишите формулу для периода колебаний груза на пружине.

Задача. В U-образную трубку постоянного сечения, колена которой расположены вертикально, налили жидкость массой m = 50 г. Определите период T колебаний жидкости в трубке, возбуждаемых небольшим смещением уровней от положения равновесия. Площадь поперечного сечения трубки $S = 1$ см^2, плотность жидкости $\rho = 1$ г/см^3 . Сжимаемостью жидкости и ее трением о стенки трубки можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2 .

Молекулярная физика и термодинамика

Задание 1

Вопрос. Дайте определение идеального газа. Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа.

Задача. На металлическую пластинку напыляют серебряное покрытие, используя пучок атомов серебра, направленный перпендикулярно пластинке. С какой скоростью v_0 растет толщина покрытия, если атомы серебра оказывают на пластинку давление $p = 0{,}1$ Па? Кинетическая энергия одного атома серебра в пучке $E = 10^{-17}$ Дж, молярная масса серебра $\mathrm{M} = 108$ г/моль, его плотность $\rho = 10{,}5$ г/см^3. Постоянная Авогадро $N_\mathrm{A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Задание 2

Вопрос. Дайте определение внутренней энергии термодинамической системы. Какими способами можно изменить внутреннюю энергию?

Задача. В двух одинаковых сосудах, соединенных между собой короткой тонкой трубкой с краном, находится гелий. Средняя квадратичная скорость теплового движения атомов гелия в первом сосуде v_1, а во втором v_2. Пренебрегая теплообменом гелия с окружающими телами, найдите отношение давления $p_\text{к}$, которое установится в сосудах после открывания крана, к начальному давлению p_1 в первом сосуде, если масса гелия во втором сосуде была в n раз больше, чем в первом.

Задание 3

Вопрос. Дайте определение количества теплоты. Сформулируйте первый закон термодинамики.

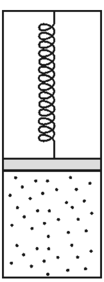


Рис. 3

Задача. В закрытом цилиндрическом сосуде под невесомым тонким поршнем находится идеальный одноатомный газ (рис.3). В пространстве над поршнем создан вакуум. Поршень удерживается в равновесии пружиной жесткостью $k = 100$ Н/м, помещенной между поршнем и крышкой цилиндра. Пружина не деформирована, если поршень располагается у дна цилиндра. В начальном состоянии расстояние между поршнем и дном сосуда $h = 0{,}2$ м. Найдите количество теплоты ΔQ, которое нужно сообщить газу, чтобы расстояние между поршнем и дном сосуда удвоилось. Теплоемкостью сосуда, теплообменом с окружающей средой и трением можно пренебречь.

Задание 4

Вопрос. Что такое насыщенный водяной пар? Дайте определение влажности и относительной влажности воздуха.

Задача. Стакан объемом $V_0 = 290$ см^3 перевернули вверх дном и медленно погрузили в воду на глубину h = 5 м. При этом объем воздуха в стакане оказался равным $V_1 = 194$ см^3. Найдите парциальное давление p водяного пара, находящегося в стакане, считая его насыщенным. Относительная влажность атмосферного воздуха f = 60%, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Температуру воздуха в стакане считайте постоянной. Размерами стакана по сравнению с глубиной его погружения можно пренебречь.

Задание 5

Вопрос. Дайте определение коэффициента полезного действия (КПД) теплового двигателя. Чему равно максимальное значение КПД?

Задача. Определите массу M воды с начальной температурой $t = 0$ °C, которая превратится в лед при той же температуре за τ = 2 ч работы холодильной машины, если температура радиатора холодильной машины T = 373 К. Холодильная машина работает по циклу Карно, мощность ее двигателя N = 0,6 кВт. Удельная теплота плавления льда λ = 334 Дж/г.

Задание 6

Вопрос. Какие виды парообразования вы знаете? Дайте определение удельной теплоты парообразования.

Задача. В цилиндре под поршнем находятся воздух, водяной пар и вода. Число молей воздуха в n = 3 раза превышает число молей водяного пара, а масса воды равна массе водяного пара. Объем смеси изотермически увеличивают до тех пор, пока вся вода не испарится. Определите отношение давлений в цилиндре в конечном и начальном состояниях.

Электродинамика

Задание 1

Вопрос. Сформулируйте принцип суперпозиции электрических полей. Чему равна напряженность электростатического поля равномерно заряженной проводящей сферы?

Задача. Три концентрические проводящие сферы, имеющие радиусы R, $2R$ и $3R$, находятся в вакууме. Внутренняя сфера несет заряд q, средняя сфера не заряжена, а внешняя заземлена. Какое количество теплоты ΔQ выделится после соединения внутренней сферы со средней сферой проводником, имеющим достаточно большое сопротивление?

Задание 2

Вопрос. Дайте определение электроемкости. Запишите формулу для электроемкости плоского конденсатора.

Задача. Плоский конденсатор, подключенный к источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В, состоит из двух квадратных обкладок площадью $S = 1$ м^2 каждая, расположенных на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга. Между обкладками находится диэлектрическая пластинка с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 5$, заполняющая весь объем конденсатора. Пластинку начинают выдвигать вдоль одной из сторон конденсатора с постоянной скоростью $v_0 = 2$ см/с. Какой по величине и направлению электрический ток I будет течь в цепи источника при этом? Внутренним сопротивлением источника можно пренебречь. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Задание 3

Вопрос. Как определяются работа и мощность электрического тока? Сформулируйте закон Джоуля–Ленца.

Задача. При подключении к аккумулятору с внутренним сопротивлением $r = 0{,}16$ Ом в нагревательном элементе выделяется мощность $P_1 = 200$ Вт. При подключении нагревательного элемента к двум таким аккумуляторам, соединенным последовательно, выделяемая в нагревателе мощность составила $P_2 = 288$ Вт. Найдите ЭДС $\mathcal{E}$ аккумулятора.

Задание 4

Вопрос. Какими носителями заряда создается электрический ток в электролитах? Сформулируйте законы электролиза.

Задача. Электроды, подключенные к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В, погружены в водный раствор серной кислоты. Изменяя расстояния между электродами, их установили так, что батарея стала отдавать во внешнюю цепь максимальную мощность. Определите эту мощность P, если за время $\tau = 50$ мин при электролизе выделяется $m = 0{,}3$ г водорода. Поляризацией электродов при электролизе можно пренебречь. Элементарный заряд $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Авогадро $N_\text{А} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Задание 5

Вопрос. Как определяются модуль и направление вектора магнитной индукции? Сформулируйте закон Ампера.

Задача. Металлический стержень массой $m = 7{,}5$ г и длиной $L = 30$ см подвешен горизонтально на двух невесомых гибких проводниках длиной $l = 15$ см каждый. Стержень находится в однородном магнитном поле, индукция которого направлена вертикально и равна $B = 57$ мТл. По стержню пропускают кратковременный прямоугольный импульс постоянного тока силой I_0 и длительностью $\tau = 0{,}1$ с. При каком минимальном значении I_0 стержень совершит полный оборот, двигаясь по окружности вокруг оси, проходящей через точки подвеса гибких проводников? Считайте, что смещение стержня за время τ ничтожно мало. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10\ \text{м/с}^2$.

Задание 6

Вопрос. Дайте определение напряженности электрического поля. Что такое силовые линии электрического поля?

Задача. Свободная заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}4$ Тл по окружности радиусом $R = 4$ м. В некоторый момент времени включают однородное электрическое поле, напряженность которого направлена параллельно вектору магнитной индукции и равна $E = 10$ В/м. Через какое время Δt после включения электрического поля кинетическая энергия частицы увеличится в $n = 2$ раза? Силу тяжести не учитывайте.

Оптика

Задание 1

Вопрос. Дайте определение светового луча. Сформулируйте законы преломления света.

Задача. Рыбак стоит на гладком прозрачном льду и смотрит вертикально вниз. Кажущееся рыбаку расстояние от верхней поверхности льда до дна озера равно L. Определите действительную глубину озера H (от верхней поверхности льда до дна), если толщина льда h, показатель преломления льда $n_л$, показатель преломления воды $n_в$.

Задание 2

Вопрос. Запишите формулу тонкой линзы. Чему равно увеличение, даваемое такой линзой?

Задача. В фокальной плоскости тонкой собирающей линзы расположен экран. На главной оптической оси линзы, перпендикулярной экрану, находится точечный источник света. На экране при этом наблюдается кольцевая неосвещенная область. На каком расстоянии d от линзы находится точечный источник, если площадь неосвещенной области в n раз больше площади линзы, а фокусное расстояние линзы равно F?

Задание 3

Вопрос. Дайте определение фокусного расстояния и оптической силы линзы. Запишите формулу тонкой линзы.

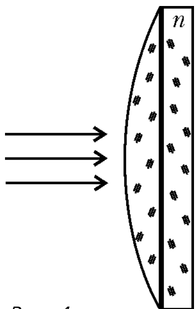


Рис. 4

Задача. На выпуклую поверхность тонкой плосковыпуклой линзы падает узкий пучок световых лучей, параллельный ее главной оптической оси (рис.4). На небольшом расстоянии от плоской поверхности линзы помещают параллельно ей плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной d = = 9,8 мм с показателем преломления n = 1,4. На какое расстояние l сместится вдоль главной оптической оси линзы точка, в которой фокусируется пучок? Углы падения и преломления света считайте малыми.

Задание 4

Вопрос. Укажите, в каких физических явлениях проявляются волновые свойства света, а в каких – корпускулярные.

Задача. Плоская монохроматическая световая волна частично проходит через прямоугольную стеклянную призму $П$ с малым углом α при вершине, а частично – мимо призмы (рис.5). Лучи света падают на призму перпендикулярно грани, прилегающей к углу α. Показатель преломления стекла равен n. Волны, прошедшие через призму и мимо нее, интерферируют на экране $Э$, который расположен перпендикулярно падающим на призму лучам. Определите расстояние Δx между соседними максимумами в интерференционной картине, если длина волны света равна λ.

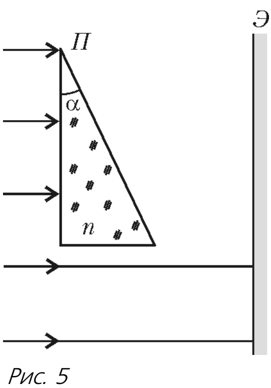


Рис. 5

Задание 5

Вопрос. Сформулируйте условия образования максимумов и минимумов в интерференционной картине.

Задача. Интерференционная картина «кольца Ньютона» наблюдается в отраженном монохроматическом свете с длиной волны $\lambda = 0,63$ мкм. Интерференция возникает в заполненном бензолом тонком зазоре между выпуклой поверхностью плосковыпуклой линзы и плоской стеклянной пластинкой, причем плоская поверхность линзы и пластинка параллельны друг другу (рис.6). Найдите радиус первого (внутреннего) темного кольца, если радиус кривизны поверхности линзы R = 10 м, а показатели преломления линзы и пластинки одинаковы и превышают показатель преломления бензола, равный n = 1,5. Свет падает по нормали к пластинке.

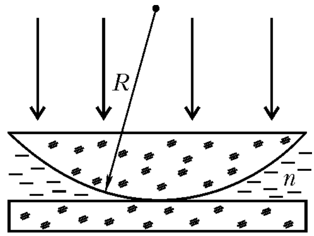


Рис. 6

Задание 6

Вопрос. Какое явление называется фотоэффектом? Сформулируйте законы фотоэффекта.

Задача. Шар радиусом R из вольфрама, покрытый тонким слоем цезия, помещен в вакуум. Шар освещают лазером, дающим излучение с длиной волны λ_1. Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для цезия на вольфраме, равна λ_2. Определите максимальный заряд $q_{\max}$, который может приобрести шар. Постоянная Планка h, элементарный заряд e, скорость света c, электрическая постоянная ε_0.

Материалы по математике взяты из книги «Задачи вступительных испытаний по математике в МГУ имени М.В.Ломоносова в 2010 году (с решениями): Учебное пособие» (М.: Издательство Московского университета, 2010)

Публикацию материалов по физике подготовили В.Русаков, С.Чесноков

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В течение ряда лет Московский инженерно-физический институт – ныне Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» – проводит Всероссийскую отраслевую физико-математическую олимпиаду школьников «Росатом». Олимпиада проходит в несколько туров – с декабря по апрель. В 2009/10 учебном году олимпиада «Росатом» входила в перечень олимпиад школьников, утвержденный Министерством образования и науки России.

Ниже приводятся варианты заданий одного из туров олимпиады «Росатом» по математике и физике 2009/10 учебного года.

Олимпиада «Росатом»

МАТЕМАТИКА

1. Решите системы:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ x + 3y = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2|x-2| - 3y = -3, \\ x - 3|y-4| = 2. \end{cases}$

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt{2x^2 - 5} = 5 - 2x^2$;

б) $2x^2 + \sqrt{3}\sqrt{2x^2 - 5} - 11 + \sqrt{-x} = \sqrt{-x}$.

3. Решите уравнения:

а) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$;

б) $2\sqrt{3}\sin x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x - 2\cos x - 1 = 0$.

4. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{7x - x^2 - 6}\left((8a - 15)\sin\frac{\pi x}{6} - 6\cos\frac{\pi x}{3} - 4a^2 + a + 9\right) = 0$$

имеет ровно 5 решений. Решите уравнение при $a = 0$.

5. В равнобедренный треугольник ABC, $|AB| = |BC|$, с углом при вершине B, равным α, вписан круг D_1. Круг D_2 касается круга D_1 и отрезков AB и BC, круг D_3 касается круга D_2 и отрезков AB и BC и т.д. а) Найдите радиус круга D_1, если угол α равен $30°$ и длина основания AC равна 5. б) Найдите угол α, если отношение суммы площадей всех кругов D_k к площади треугольника ABC равно $\pi/8$.

ФИЗИКА

1. Три конденсатора с емкостями C, $3C$ и $2C$ соединены так, как показано на рисунке 1. К цепи приложили напряжение U. Найдите заряд конденсатора емкостью $3C$.

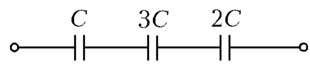


Рис. 1

2. Тело взвешивают на неравноплечных, но уравновешенных весах. На одной чашке весов тело уравновешивается гирей массой m, на второй – гирей массой $1{,}44m$. Чему равна истинная масса тела?

3. Математическому маятнику длиной l, находящемуся в положении равновесия, толчком сообщили некоторую скорость, и маятник начал совершать колебания. Известно, что максимальный угол отклонения маятника от положения равновесия равен φ_0 ($\varphi_0 \ll 1$). Через какое минимальное время после толчка скорость маятника равна половине его максимальной скорости?

4. Легкий воздушный шар, заполненный гелием, находится в равновесии в атмосферном воздухе. Найдите отношение массы оболочки шара к массе гелия в шаре. Молярная масса гелия $\mathrm{M_г} = 4$ г/моль. Считать, что молярная масса воздуха $\mathrm{M_в} = 29$ г/моль. Упругостью и толщиной оболочки шара пренебречь. Температура гелия равна температуре окружающего воздуха.

5. Тело покоится на наклонной плоскости. Известно, что коэффициент трения между телом и плоскостью μ равен тангенсу угла наклона плоскости α, т.е. $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$. В некоторый момент времени тело толкают со скоростью v_0 в направлении, перпендикулярном направлению наибыстрейшего спуска с плоскости (рис.2). Какой будет величина скорости тела в тот момент, когда вектор скорости $\vec{v}_1$ будет составлять угол β с этим направлением?

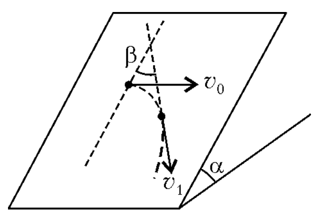


Рис. 2

Публикацию подготовили А.Баскаков, С.Муравьев, Д.Теляковский

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Олимпиада «Физтех-2010»

Физико-математическая олимпиада «Физтех-2010» входит в перечень олимпиад школьников на 2009/10 учебный год, утвержденный Министерством образования и науки России. Олимпиада прошла в 33 городах России.

Победители и призеры олимпиады награждаются дипломами первой, второй и третьей степени. Победители (диплом первой степени) приравниваются к лицам, набравшим максимальное количество баллов по ЕГЭ по данному предмету. Призеры (дипломы второй и третьей степени) имеют льготы, определяемые приемной комиссией вуза.

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. В равнобедренном треугольнике ABC основание AC равно 1, угол ABC равен $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Точка D лежит на стороне BC так, что площадь треугольника ABC вчетверо больше площади треугольника ADC. Найдите расстояние от точки D до прямой AB и радиус окружности, описанной около треугольника ADC.

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x \cos 5x - \sin 2x \cos 6x}{\cos x} = 0 .$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{18-x}{2+x}} > -x .$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x (y+1) = 4\log_{x+2}\sqrt{y-1}, \\ \log_{y-1}(x+2) = \log_x\left(\dfrac{x^3}{y+1}\right). \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} |x-1|+|x+1|-2y=0, \\ x^2+y^2-2ay+2a=1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

6. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 8. Боковое ребро SC перпендикулярно основанию и имеет длину 15. Сфера, центр O которой лежит в плоскости SBC, касается ребер SA, AB и AC в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Найдите AA_1, расстояние от точки O до ребра BC и радиус сферы.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\log_{x+2}\left(\sqrt{x+3}+1\right) \le 1 .$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=1, \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=y^2-2x^2+2x+3. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x+3|\sin x|=\cos 4x-\cos 2x .$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна $\sqrt{2}$, высота SO равна 2. Точка K лежит на высоте SO, причем $KS : KO = 1 : 3$. Через точку K проведена плоскость Π, перпендикулярная прямой SA. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью Π, расстояние от точки D до плоскости G и угол между плоскостью Π и прямой SD.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x+\sqrt{2}\cos y=\dfrac{3}{2}, \\ \sqrt{2}\sin y+\sqrt{3}\cos x=\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

6. В трапецию $ABCD$ можно вписать окружность. Длины ее боковых сторон AB и CD равны 3 и 5 соответственно, а длина основания AD больше длины BC. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно $\dfrac{5}{11}$. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и длины ее диагоналей.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. При движении автобуса по горизонтальному участку дороги у него устанавливается скорость v, если на ведущие колеса передается мощность N. При движении на спуске с углом наклона поверхности дороги к горизонту α ($\sin\alpha = 1/30$) при передаваемой на ведущие колеса той же мощности N у автобуса устанавливается скорость $3v/2$. При движении на подъеме при передаваемой на ведущие колеса мощности $2N$ у автобуса устанавливается скорость $v/2$. Найдите синус угла наклона поверхности дороги к горизонту на подъеме. Сила сопротивления движению автобуса пропорциональна его скорости. Все участки дороги прямолинейные.

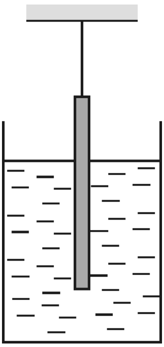


Рис. 1

2. Однородный стержень постоянного поперечного сечения висит на нити, при этом 70% длины стержня находится в воде (рис.1). Когда стержень переместили вверх, оставив в воде 30% его длины, сила натяжения нити увеличилась на 20%. Найдите плотность материала стержня. Плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3.

3. Газообразный гелий из начального состояния *1* (рис.2) расширяется в процессе *1–2* с постоянной теплоемкостью, совершая работу $A_{12} = 400$ Дж. Затем к газу подводится количество теплоты $Q_{23} = 400$ Дж в процессе *2–3*, в котором давление прямо пропорционально объему. Температуры в состояниях *1* и *3* равны.

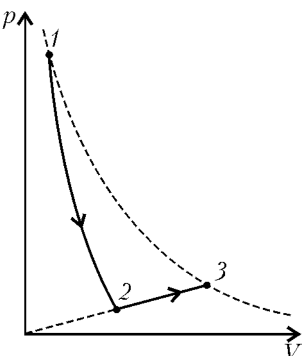


Рис. 2

1) Найдите количество теплоты, подведенное к газу в процессе *1–2*.

2) Найдите молярную теплоемкость газа в процессе *1–2*, выразив ее через R.

4. В цепи, показанной на рисунке 3, все элементы можно считать идеальными. В начальный момент ключ разомкнут, ток в цепи отсутствует. Ключ на некоторое время замыкают, а потом размыкают. Оказалось, что после размыкания ключа в цепи выделилось в два раза больше тепла, чем при замкнутом ключе. Найдите отношение заряда, протекшего через источник при замкнутом ключе, к заряду, протекшему через резистор после размыкания ключа.

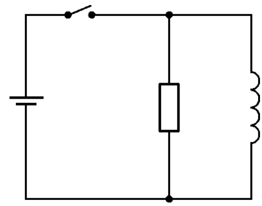


Рис. 3

5. Тонкая линза создает изображение предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси, с некоторым увеличением. Если расстояние от предмета до линзы увеличить вдвое, получается прямое изображение с увеличением, вдвое большим первоначального увеличения. С каким увеличением изображался предмет вначале?

Публикацию подготовили Д.Александров, П.Кожевников, Р.Константинов, В.Чивилёв, М.Шабунин

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. На наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежат два бруска (рис.1). Коэффициент трения между нижним бруском массой m_1 и плоскостью равен μ, а между верхним бруском массой m_2 и плоскостью трение отсутствует. При каком максимальном угле α бруски будут удерживаться на наклонной плоскости?

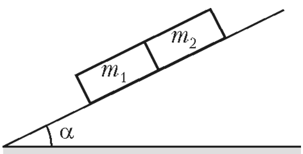


Рис. 1

2. Электродвигатель, рассчитанный на потребление одной и той же мощности при двух напряжениях 220 В и 380 В, подключен к электростанции с помощью длинных подводящих проводов. Напряжение на электродвигателе равно 220 В. Во сколько раз изменится мощность, рассеиваемая на подводящих проводах, если напряжение на электродвигателе поднять до 380 В?

3. Цилиндрическое горлышко колбы закрыто поршнем высотой h и диаметром D, который может перемещаться без трения (рис.2). В колбе находится воздух объемом V. Колбу медленно нагревают. Во сколько раз увеличится температура колбы, прежде чем поршень из нее выдавится?

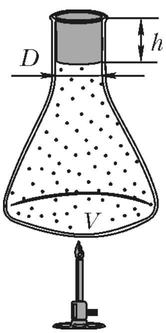


Рис. 2

4. На бесконечных рельсах поперек лежит проводящая перемычка, имеющая массу M и сопротивление R (рис.3). Вся система находится в однородном магнитном поле $\vec{B}$, направленном перпендикулярно перемычке под углом α к вертикали. Между рельсами включают батарейку с ЭДС $\mathcal{E}$, и перемычка начинает двигаться. Коэффициент трения между перемычкой и рельсами μ. Найдите установившуюся скорость перемычки, если известно, что в процессе движения она не отрывалась от рельсов. Внутренним сопротивлением батарейки, сопротивлением рельсов и подводящих проводов пренебречь. Ускорение свободного падения равно g.

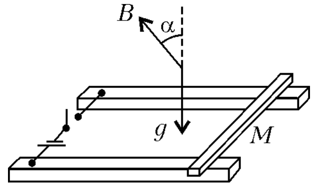


Рис. 3

5. Оцените, во сколько раз среднее расстояние между центрами молекул воздуха превышает среднее расстояние между центрами молекул воды при нормальных условиях. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения задачи величины, выбрать их численные значения и получить численный результат.

Внимание! Задача считается решенной, если помимо правильного ответа приведены необходимые объяснения.

Публикацию подготовили
А.Погосов, В.Баткин, А.Киприянов, М.Махмудиан

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

ФИЗИКА

Вступительный экзамен проводился для тех абитуриентов, которые имели право не сдавать единый государственный экзамен: для выпускников техникумов, выпускников школ прежних лет, иностранцев и освобожденных от ЕГЭ по состоянию здоровья. Экзамен был письменный и оценивался по 100-балльной шкале. Задачи В1 – В12 в каждом варианте оценивались максимум в 5 баллов, задачи С1 – С4 – максимум в 10 баллов каждая.

Вариант 1

В1. В течение первых 5 часов поезд двигался со средней скоростью 70 км/ч, а затем в течение 4 часов – со средней скоростью 25 км/ч. Найдите среднюю скорость поезда за все время движения.

В2. Под действием некоторой постоянной силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь 40 см. Когда на тележку положили груз массой 6 кг, под действием той же силы за то же время тележка прошла из состояния покоя путь 10 см. Какова масса тележки?

В3. Шар массой 100 г, двигавшийся со скоростью 5 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с шаром массой 150 г, двигавшимся в том же направлении со скоростью 4 м/с. Найдите скорость шаров после удара.

В4. С высоты 10 м над поверхностью земли вертикально вверх брошен мяч массой 500 г со скоростью 6 м/с. Мяч упал на поверхность земли со скоростью 10 м/с. Определите абсолютную величину работы, совершаемой силой сопротивления воздуха при движении мяча.

В5. После разгрузки в гавани осадка парохода уменьшилась на 80 см. Сколько тонн груза сняли с парохода, если площадь сечения парохода на уровне ватерлинии равна 3600 $м^2$?

В6. Баллон емкостью 16,6 л содержит 550 г углекислого газа.

Баллон выдерживает давление не выше $4 \cdot 10^6$ Па. При какой температуре баллон может разорваться? Молярная масса углекислого газа 44 кг/кмоль.

B7. В ванну налили 140 кг воды при 10 $^\circ$C. Сколько килограммов воды при температуре 100 $^\circ$C нужно добавить в ванну, чтобы тепловое равновесие установилось при 37 $^\circ$C?

B8. Два точечных заряда находятся в вакууме на расстоянии 0,05 м друг от друга. Если их поместить в жидкий диэлектрик и увеличить расстояние между ними на 10 см, то сила взаимодействия зарядов уменьшится в 18 раз. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

B9. Аккумулятор замкнут на сопротивление 5 Ом. Для измерения силы тока в сеть включили амперметр с внутренним сопротивлением 2 Ом, и он показал ток 10 А. Какова была сила тока в цепи до включения амперметра? Внутренним сопротивлением аккумулятора пренебречь.

B10. Плоский виток, площадь которого 10 $см^2$, расположен перпендикулярно линиям индукции однородного магнитного поля. Найдите абсолютную величину ЭДС, возникающей в витке, если индукция поля равномерно убывает от 0,7 Тл до 0,2 Тл за 10^{-4} с.

B11. Математический маятник длиной 0,1 м совершает гармонические колебания с амплитудой 0,07 м. Определите наибольшее ускорение грузика маятника.

B12. При бомбардировке нейтронами ядра атома алюминия $^{27}_{13}Al$ испускается α-частица и образуется ядро некоторого изотопа. Определите количество нейтронов в ядре вновь образовавшегося изотопа.

C1. Гирька массой 200 г, привязанная к резиновому шнуру, вращается с угловой скоростью 5 рад/с по окружности в горизонтальной плоскости так, что шнур составляет угол 60° с вертикалью. Найдите длину нерастянутого шнура, если его жесткость 20 Н/м.

C2. Нижние концы симметричной лестницы-стремянки соединены веревкой длиной 3 м, при этом верхняя точка лестницы находится на высоте 3 м. Чему будет равна сила натяжения веревки в тот момент, когда человек массой 80 кг поднимется на высоту 2,4 м? Массой лестницы и трением пренебречь.

C3. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из конденсаторов в 5 раз уменьшают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряжение на этом конденсаторе?

C4. На рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 10 см падает цилиндрический пучок лучей, параллельных главной оптической оси. За линзой на расстоянии 20 см от нее установлен экран, на котором получается круглое светлое пятно диаметром 24 см. Определите диаметр пучка лучей.

Вариант 2

B1. Велосипедист, проехав 2 км со скоростью 6 км/ч, остановился и отдыхал в течение 40 мин. Оставшиеся 8 км пути он проехал со скоростью 8 км/ч. Найдите среднюю скорость велосипедиста на всем пути.

B2. Под действием некоторой постоянной силы тележка, двигаясь из состояния покоя, прошла путь 40 см. Когда на тележку положили груз массой 2 кг, под действием той же силы за то же время тележка прошла из состояния покоя путь 30 см. Какова масса тележки?

B3. Электровоз массой $1{,}8 \cdot 10^5$ кг, движущийся со скоростью 1,5 м/с, сталкивается с неподвижным вагоном массой $4{,}5 \cdot 10^4$ кг, после чего они движутся вместе. Найдите скорость совместного движения.

B4. Шар массой 3 кг, имеющий скорость 4 м/с, испытывает абсолютно неупругий удар с покоящимся шаром такой же массы. Какое количество теплоты выделяется при ударе?

B5. Однородный шар плавает на поверхности воды, на 60% погруженный в воду. Чему равен объем шара, если на него действует выталкивающая сила 3 Н?

B6. Газ массой 0,006 кг, находящийся в баллоне при 27 $^\circ C$, создает давление 300 кПа. Найдите молярную массу газа, если известно, что кислород (молярная масса 32 кг/кмоль) массой 60 г создает в таком же баллоне при 47 $^\circ C$ давление 200 кПа.

B7. Нужно смешать воду при температуре 60 $^\circ C$ и воду при температуре 10 $^\circ C$ так, чтобы температура смеси оказалась равной 20 $^\circ C$. Во сколько раз больше надо взять холодной воды, чем горячей?

B8. Два точечных заряда взаимодействуют в вакууме на расстоянии 10 см с силой 10 мН, а в жидком диэлектрике на расстоянии 5 см – с силой 20 мН. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

B9. Десять ламп сопротивлением 24 Ом каждая, рассчитанные на напряжение 16 В, соединены последовательно и подключены к сети постоянного напряжения 220 В последовательно с сопротивлением. Какова должна быть величина этого сопротивления, чтобы лампы горели полным накалом?

B10. Магнитный поток через каждый виток катушки, помещенной в магнитное поле, равен 0,2 Вб. Магнитное поле равномерно убывает до нуля за время 0,4 с, при этом в катушке индуцируется ЭДС 15 В. Сколько витков имеет катушка?

B11. Какова должна быть длина математического маятника на Луне, чтобы период его колебаний был таким же, как период колебаний математического маятника длиной 66 см на Земле? Ускорение силы тяжести на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

B12. Энергия фотонов, которыми облучается металл, в 5 раз больше работы выхода электронов из этого металла. Какую долю (в процентах) от энергии фотонов составляет максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из металла?

C1. Велосипедист производит поворот радиусом 30 м на наклонном треке. Чему равна максимально допустимая скорость движения, если коэффициент трения равен 0,5, а тангенс угла наклона трека к горизонту равен $1/2$?

C2. Шар массой 5 кг и радиусом 7 см удерживается на наклонной плоскости с помощью горизонтальной нити, прикрепленной одним концом к верхней точке шара, а другим – к наклонной плоскости. Найдите силу натяжения нити, если ее длина 25 см.

C3. Два одинаковых воздушных конденсатора соединены последовательно и присоединены к источнику постоянного напряжения. У одного из них втрое увеличивают расстояние между пластинами. Во сколько раз уменьшится напряжение на другом конденсаторе?

C4. На собирающую линзу с фокусным расстоянием 21 см падает пучок света, параллельный ее главной оптической оси. На каком расстоянии от этой линзы нужно поставить рассеивающую линзу с фокусным расстоянием 0,09 м, чтобы пучок, пройдя обе линзы, остался параллельным?

Публикацию подготовил А.Черноуцан

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Упростите выражение $\dfrac{a-5\sqrt{a}+6}{\sqrt{a}-2}-\sqrt{a}$.

2. Найдите количество натуральных двузначных чисел, которые делятся на 6 и не делятся на 12.

3. Найдите целое число – значение выражения $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}\right)^2$.

4. Решите уравнение $\sqrt{5x-6}=|x|$.

5. Решите неравенство $3/(|x|+1)\geq|x|-1$.

6. Найдите рациональное число – значение выражения $\cos\left(\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{2}\right)\right)$.

7. Решите уравнение $3\operatorname{tg}x=2\cos x$.

8. Решите неравенство $\arccos x-\arcsin x>\pi/6$.

9. Найдите целое число – значение $\log_3 5\cdot\log_5 18-\log_3 2$.

10. Решите уравнение $2^{x^2}=3^x$.

11. Решите неравенство $\lg(x-1)^2\leq\lg(|x-1|)$.

12. Найдите функцию, график которой симметричен графику функции $y=x^2$ относительно точки $(1;1)$.

13. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{(\lg(1+x))/(1-x)}.$$

14. Найдите множество значений функции $y=x^2/\left(x^2+4\right)$.

15. Найдите разность между суммой натуральных двузначных чисел, имеющих при делении на 11 остаток 3, и суммой таких же чисел, имеющих остаток 1.

16. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если отношение суммы первых 5 ее элементов к сумме всех элементов равно 31/32.

17. Найдите все значения a, при которых прямая $y = -9x + a$ является касательной к гиперболе $y = 1/x$.

18. Найдите длину стороны треугольника, если опущенная на нее высота равна 6, а две другие стороны имеют длины 10 и 15/2.

19. Найдите площадь боковой грани правильной треугольной пирамиды, если высота пирамиды равна 4, а радиус круга, вписанного в основание, равен 3.

20. Найдите все значения параметра a, при которых у системы

$$\begin{cases} ax^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + ay^2 = 1 \end{cases}$$

нет решений.

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Упростите выражение $\dfrac{a^2 - a - 2}{a - 2} - a$.

2. Найдите количество четных натуральных двузначных чисел, которые делятся на 17.

3. Найдите целое число – значение выражения $\dfrac{1}{\sqrt{3} + 2} + \sqrt{3}$.

4. Решите уравнение $\sqrt{8 - x^2} = x$.

5. Решите неравенство $\dfrac{4}{|x|} \le x$.

6. Найдите значение выражения $\cos\left(\arcsin(1/2)\right)$.

7. Решите уравнение $3\sin x = 2\cos^2 x$.

8. Решите уравнение $\arccos x + 3\arcsin x = 5\pi/6$.

9. Найдите целое число – значение выражения $\log_5 2 \cdot \log_2 25$.

10. Решите уравнение $2^{x^2} = 32^x$.

11. Решите неравенство $\lg(x-1)^3 \le \lg\left(|x-1|\right)$.

12. Найдите функцию, график которой симметричен графику функции $y = x^2$ относительно прямой $y = 1$.

13. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{(x-1)/(2-x)}.$$

14. Найдите множество значений функции $y = |x|/(|x| + 4)$.

15. Найдите наибольшее значение суммы S_n первых n членов арифметической прогрессии $\{a_n\}$, если $a_1 = 45$, а $d = -2$.

16. Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если отношение суммы первых 10 ее элементов к сумме первых 5 элементов равно 33.

17. Найдите все значения a, при которых прямая $y = -x$ является касательной к гиперболе $y = 1/(a + x)$.

18. Найдите длину стороны BC треугольника ABC, если $AB = 15$, $AC = 14$, $\angle BAC$ острый, а высота BH равна 12.

19. Найдите апофему (высоту боковой грани) правильной треугольной пирамиды, если высота пирамиды равна 1, а сторона основания имеет длину 6.

20. Найдите все значения параметра a, при которых у системы

$$\begin{cases} a|x| + y = 1, \\ |x| + ay = 1 \end{cases}$$

нет решений.

ФИЗИКА

Региональная олимпиада школьников Санкт-Петербурга для пофессионально-ориентированной молодежи

Заключительный тур

Вариант 1

1. Помощник машиниста вышел из кабины последнего вагона поезда метро и направился к выходу, расположенному у первого вагона, со скоростью v. В этот же момент поезд тронулся и начал двигаться с ускорением a. Чему равна длина поезда, если пока он ехал мимо помощника машиниста, тот прошел $1/n$ часть пути?

2. Две бусинки массами m и $2m$ надеты на гладкую горизонтальную нить и могут свободно скользить по ней. Бусинки соединены нерастянутой пружиной длиной L и жесткостью k. Бусинки раздвигают так, что длина пружины увеличивается в 1,5 раза, и отпускают. Найдите максимальные скорости бусинок.

3. Стержень массой m согнули посередине под прямым углом и подвесили на гвоздь. После того как на один из концов стержня прикрепили небольшой груз, стержень повернулся на $15°$. Чему равна масса груза?

4. Пружинный маятник совершает свободные колебания с периодом 0,6 с. За 0,05 с груз прошел расстояние 0,2 см и достиг положения равновесия. Найдите амплитуду колебаний.

5. В начальном состоянии объем и абсолютная температура идеального газа равны V_0 и T_0 соответственно. Сначала газ подвергают изобарическому расширению до объема V_1, а затем – изохорическому нагреванию до давления p_1, в результате чего температура газа становится равной T_1. Найдите давление газа в начальном состоянии.

6. В трех вершинах квадрата со стороной a находятся три точечных заряда: $+q$, $+q$ и $-q$, причем оба положительных заряда лежат на одной стороне. Определите напряженность электрического поля в четвертой вершине квадрата.

7. В каком из резисторов в схеме, представленной на рисунке 1, выделяется наибольшая мощность, если $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом, $R_4 = 4$ Ом, $R_5 = 5$ Ом, $R_6 = 6$ Ом? Найдите эту мощность, если к схеме приложено напряжение 12 В.

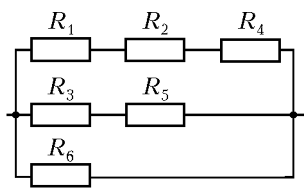


Рис. 1

8. Небольшой шарик массой m, подвешенный на нити длиной l, двигается в горизонтальной плоскости по окружности с угловой скоростью ω. Найдите угол между нитью и вертикальной осью, если шарик имеет заряд q, а его движение происходит в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией B.

9. При включении однородного магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости витка радиусом R из изолированной проволоки, по витку протек заряд q. Затем виток при неизменном поле сложили в контур, состоящий из двух окружностей, как показано на рисунке 2. Какой заряд протечет по контуру при выключении поля? Радиус меньшей окружности равен $R/4$.

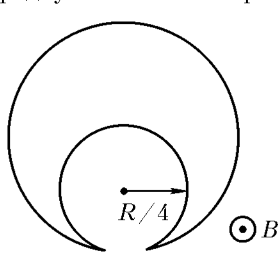


Рис. 2

10. Линза дает действительное изображение предмета, увеличивая его в 3 раза. Как изменится увеличение, если вдвое уменьшить оптическую силу линзы? Каким станет изображение? Расстояние между предметом и линзой остается неизменным.

МАТЕМАТИКА

1. Найдите целое число – значение выражения $\left(\sqrt{7-2\sqrt{10}}-\sqrt{5}\right)^2$.

2. Найдите целое число – сумму общих корней уравнений $|x|=\sqrt{3-x}$ и $x^3=4x-3$.

3. Найдите все упорядоченные пары $(m;n)$ целых чисел – решения уравнения $8m^3=n^3+61$.

4. Решите неравенство $\sqrt{1-x^2}\le 1-x$.

5. Найдите наименьший из положительных корней уравнения $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

6. Решите уравнение $\arccos x+\arcsin\sqrt{1-x^2}=\pi$.

7. Решите неравенство $\dfrac{2^{x^2}-2^{5x-6}}{\log_2(x-1)}\le 0$.

8. Найдите все значения параметра a, для которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2=2x^2+y, \\ y=ax^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

ФИЗИКА

1. Два камня брошены одновременно из одной точки с одинаковыми по модулю скоростями: один вертикально вверх, другой вертикально вниз. Они упали на землю с интервалом времени 2 с. С какой скоростью были брошены камни?

2. Ракета массой m, стартовавшая с поверхности Земли, летит с работающим двигателем с постоянной по модулю скоростью v по дуге окружности радиусом R, лежащей в вертикальной плоскости. Найдите силу тяги двигателя в тот момент, когда скорость ракеты направлена под углом α к горизонту. Изменением массы ракеты и сопротивлением воздуха пренебречь.

3. Однородный цилиндр массой m и высотой H стоит на дне цилиндрического стакана. В стакан наливают столько жидкости, что ее уровень совпадает с верхним основанием цилиндра. Плотность жидкости в n раз меньше плотности материала цилиндра, радиус стакана в k раз больше радиуса цилиндра. Какую минимальную работу нужно совершить, чтобы вытащить цилиндр из жидкости?

4. Найдите плотность газовой смеси водорода и кислорода, если масса кислорода больше массы водорода в $N = 8$ раз. Давление смеси $p = 100$ кПа, температура $T = 300$ К.

5. На концах горизонтального непроводящего стержня длиной $2L$ закреплены два маленьких шарика, каждый из которых имеет заряд Q. По стержню без трения может скользить маленькая бусинка массой m. Заряд бусинки равен q, причем заряды бусинки и шариков имеют одинаковые знаки. Найдите период малых колебаний бусинки.

6. Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта для материала катода фотоэлемента, равна $\lambda_{кр} = 10^{-6}$ м. Зеленый свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм падает на катод. При какой величине тормозящей разности потенциалов анода и катода прекращается ток через фотоэлемент?

ИНФОРМАТИКА

1. Заданы три числа:

в шестнадцатиричной системе счисления ***а*** = 4D5,

в двоичной системе счисления ***в*** = 111010,

в восьмеричной системе счисления ***с*** = 65.

Найдите значение выражения ***а*** + ***в*** − ***с***. Результат представьте в десятичной системе счисления.

2. Числа (x, y) - координаты точки на плоскости. Изобразите область, в которой логическое выражение принимает значение «истина»:

(|x|<=1) **and** (|y|<=1) **or** (y>1) **and** (y<=2−|x|).

3. Значения двумерного массива размером 7×7 задаются следующим алгоритмом:

```
нц для n от 1 до 7
    нц для k от 1 до 7
        a[n,k]:=n−k+1
    кц
кц
```

Сколько элементов массива будут иметь положительные значения?

4. Напишите фрагмент программы, который в заданном одномерном массиве из n элементов переставляет нулевые элементы в конец этого же массива (известно, что не все элементы массива нулевые).

5. Опишите словесно, что вычисляет следующий алгоритм:

```
нц для i от 1 до 10
    s[i]:=0; k:=0;
    j1:=100*(i−1)+1; j2:=j1+99;
```

```
нц для j от j1 до j2
    если a[j]>0 то s[i]:=s[i]+a[j]; k:=k+1; все
кц
s[i]:=s[i]/k;
```
кц

6. Задано натуральное число n и вещественное число x. Найдите значение цепной дроби

$$y = \cfrac{1}{1 - \cfrac{2 \cdot x}{2 + x + \cfrac{x^2}{6 + \cfrac{x^2}{10 + \cfrac{x^2}{14 + \ddots + \cfrac{x^2}{2 \cdot (2 \cdot n + 1)}}}}}}.$$

Публикацию подготовили Т.Андреева, А.Басов, Г.Измайлов, М.Коробков, В.Родионов

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ

Вариант 1

Ответы к задачам части 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
1	2	4	3	2	4	1	4	2	3	4	3	4	1	3

A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25
4	1	2	1	3	1	2	3	4	2

Ответы к задачам части 2

B1	B2	B3	B4	B5
121	23	20	7,2	8

Указания и решения к избранным вопросам и задачам

A5. Используйте закон сохранения энергии.

A7. Сила трения направлена к центру окружности и равна максимальной силе трения покоя.

A17. Так как гипотенузы равны ($OA = OC$), отношение синусов равно отношению противолежащих катетов.

B3. Запишем формулу с исключенным временем дважды – для всего пути и для последнего участка:

$$0 - v_0^2 = -2as,$$

$$0 - v_{02}^2 = -2as_2\,.$$

Поделив уравнения почленно, найдем

$$v_0 = v_{02}\sqrt{\frac{s}{s_2}} = 2v_{02} = 20\,\text{м/с}\,.$$

C1. 1) При перемещении ползунка влево сопротивление цепи уменьшается, а сила тока увеличивается в соответствии с законом Ома для полной цепи $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$, где R – сопротивление внешней цепи.

2) Изменение тока, текущего по первичной обмотке трансформатора, вызывает изменение индукции магнитного поля,

создаваемого этой обмоткой. Это приводит к изменению магнитного потока через вторичную обмотку трансформатора.

3) В соответствии с законом индукции Фарадея возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ во вторичной обмотке, а следовательно, и напряжение U на ее концах, регистрируемое вольтметром.

4) Когда движок придет в крайнее левое положение и движение его прекратится, амперметр будет показывать постоянную силу тока в цепи, а напряжение, измеряемое вольтметром, окажется равным нулю.

С2. Начальная скорость полета находится из закона сохранения энергии

$$mgH = \frac{mv_0^2}{2}$$

и определяется только высотой горки. Дальность полета выражается формулой

$$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

и принимает максимальное значение при $\alpha = 45^\circ$. Высота полета равна

$$h = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{H}{2}.$$

С3. Запишем для шара второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$F_{\text{А}} - m_{\text{об}}g - m_{\text{He}}g = 0$$

и подставим в него выражения

$$F_{\text{А}} = m_{\text{возд}}g = \frac{pV\text{M}_{\text{возд}}g}{RT} = \frac{p\text{M}_{\text{возд}}g}{RT} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$m_{\text{He}} = \frac{p\text{M}_{\text{He}}}{RT} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$m_{\text{об}} = \mu_{\text{об}} \cdot 4\pi r^2, \text{ где } \mu_{\text{об}} = 1\,\text{кг/м}^2.$$

Получаем

$$r = \frac{3\mu_{\text{об}}RT}{p\left(\text{M}_{\text{возд}} - \text{M}_{\text{He}}\right)} \approx 2{,}7\,\text{м}, \quad m_{\text{об}} = \mu_{\text{об}} \cdot 4\pi r^2 \approx 92\,\text{кг}.$$

С4. Под действием постоянной силы, равной векторной сумме силы тяжести $m\vec{g}$ и электрической силы $q\vec{E}$, частица движется с постоянным ускорением. Из состояния покоя частица движется по прямой линии в направлении ускорения под углом α к вертикали таким, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{qE}{mg}.$$

Отсюда находим

$$E = \frac{mg\,\mathrm{tg}\alpha}{q} = 500\,\text{кВ/м}.$$

С5. Амплитуду колебаний груза A можно найти, используя связь между амплитудой и максимальной скоростью:

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = v_{\max}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Максимальное смещение изображения A' выражается через амплитуду колебаний и увеличение линзы Γ:

$$A' = \Gamma A = \frac{f}{d}A.$$

Расстояние от плоскости колебаний маятника до линзы найдем из формулы линзы:

$$d = \frac{fF}{f - F}.$$

После подстановки получаем

$$A' = v_{\max}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{f - F}{F} = 0{,}15\,\text{м}.$$

С6. Запишем уравнение Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\frac{hc}{\lambda} = A_{\text{вых}} + \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{\max}$$

и подставим в него формулу для красной границы:

$$A_{\text{вых}} = \frac{hc}{\lambda_0}$$

и формулу для задерживающего напряжения:

$$eU = \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{\max}.$$

Из получившегося уравнения выражаем λ:

$$\lambda = \frac{hc\lambda_0}{hc + eU\lambda_0} = 200\,\text{нм}.$$

Вариант 2

Ответы к задачам части 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
1	3	3	3	2	1	2	1	1	2	2	1	4	5	4

A16	A17	A18	A19	A20	A21	A22	A23	A24	A25
1	3	4	1	4	4	4	3	2	2

Ответы к задачам части 2

B1	B2	B3	B4	B5
121	23	0,6	16	16

Указания и решения к избранным вопросам и задачам

A1. Путь лучше искать графически − как абсолютную величину площади под графиком скорости.

A7. Модуль силы трения равен

$$F_{\text{тр}} = \mu N = \mu\left(mg - F\sin\alpha\right).$$

A23. Из равенств $\dfrac{hc}{0,25\lambda_{\text{кр}}} = \dfrac{hc}{\lambda_{\text{кр}}} + E_2$ и $\dfrac{hc}{0,5\lambda_{\text{кр}}} = \dfrac{hc}{\lambda_{\text{кр}}} + E_1$ находим $E_1 = \dfrac{E_2}{3} = \dfrac{E_0}{3}$.

A25. ЭДС источника равна $\mathcal{E} = 6,0\,\text{В}$. Ток в некоторый момент можно найти из уравнения $IR = \mathcal{E} - U$. В момент времени t = 2 с получаем I = 80 мкА.

B1. Центростремительное ускорение определяется силой тяготения. Если сила тяготения уменьшается, то радиус орбиты увеличивается. Скорость спутника находится из второго закона Ньютона: $v = \sqrt{\dfrac{GM}{r}}$, скорость уменьшается. Период обращения $T = \dfrac{2\pi r}{v}$ увеличивается.

B3. Из проекции второго закона Ньютона на горизонтальную ось x

$$F_{Bx} - F_{Cx} = 0$$

находим F_{Cx} = 0,3 Н. Отсюда

$$F_{Cy} = \sqrt{F_C^2 - F_{Cx}^2} = 0,4\,\text{Н}.$$

Из проекции второго закона Ньютона на вертикальную ось y

$$F_{Cy} + F_{By} - mg = 0$$

находим F_{By} = 0,6 Н.

С1. Поскольку давление и плотность насыщенного пара зависят только от температуры, при изотермическом увеличении объема пара его масса будет увеличиваться, а масса жидкости будет уменьшаться.

С2. Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$mv = \frac{m}{2}v_1 + \frac{m}{2}v_2,$$

$$\frac{mv^2}{2} + \Delta E = \frac{m}{2}\frac{v_1^2}{2} + \frac{m}{2}\frac{v_2^2}{2}.$$

Исключив v_2, для v_1 получим квадратное уравнение

$$v_1^2 - 2v_1v + v^2 - \frac{2\Delta E}{m} = 0 ,$$

больший корень которого

$$v_1 = v + \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} = 900\,\text{м/с}$$

соответствует осколку, летящему вперед быстрее снаряда. (Меньший корень соответствует второму осколку.)

Замечание. Решение выглядит проще, если рассмотреть разрыв снаряда в системе отсчета, где он вначале покоился. Из закона сохранения импульса следует, что осколки в этом случае имеют одну и ту же скорость u, которую легко найти из закона сохранения энергии:

$$2\frac{m}{2}\frac{u^2}{2} = \Delta E , \quad u = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} = 500 \ \text{м/с} .$$

В неподвижной системе отсчета $v_1 = v + u = 900\,\text{м/с}$.

С3. В процессе медленного расширения газа поршень будет практически в равновесии, т.е. давление будет оставаться одним и тем же и равным

$$p_2 = \frac{F_{\text{тр}}}{S} = 12 \cdot 10^5\ \text{Па} .$$

Запишем первый закон термодинамики для перехода из начального состояния в конечное:

$$Q = \left(\frac{3}{2}p_2V_2 - \frac{3}{2}p_1V_1\right) + p_2\Delta V ,$$

или

$$Q = \left(\frac{3}{2}p_2\left(L + x\right)S - \frac{3}{2}p_1LS\right) + p_2xS ,$$

откуда находим

$$L = \frac{Q - 2{,}5 p_2 x S}{1{,}5\left(p_2 S - p_1 S\right)} = \frac{Q - 2{,}5 F_{\text{тр}} x}{1{,}5\left(F_{\text{тр}} - p_1 S\right)} = 0{,}3\,\text{м} .$$

С4. При малом смещении x бусинки из положения равновесия на нее действует возвращающая сила

$$F_x = k\frac{qQ}{(l+x)^2} - k\frac{qQ}{(l-x)^2} = -\frac{4kqQlx}{(l+x)^2(l-x)^2} \approx -\frac{4kqQ}{l^3}x .$$

Эффективная жесткость равна $K = \frac{4kqQ}{l^3}$, период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^3}{4kqQ}} .$$

Для отношения периодов получаем

$$\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{Q}{Q_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ или } T_1 = \frac{T}{\sqrt{2}} .$$

Замечание. Для получения ответа не обязательно проводить полное вычисление возвращающей силы. Достаточно заметить, что возвращающая сила пропорциональна заряду частицы Q. Следовательно, эффективная жесткость K также пропорциональна Q, а период колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/K}$ пропорционален $1/\sqrt{Q}$.

С5. Сила Ампера со стороны вертикального магнитного поля направлена горизонтально (рис.1). Запишем второй закон Ньютона в проекции на ось x, направленную вдоль ускорения:

$$F_{\text{А}}\cos\alpha - mg\sin\alpha = ma , \text{ где } F_{\text{А}} = IBL .$$

Получаем

$$I = \frac{m}{L}\frac{a + g\sin\alpha}{B\cos\alpha} \approx 4\,\text{А} .$$

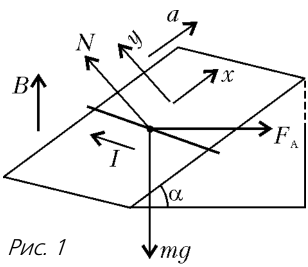


Рис. 1

С6. При облучении катода фотонами с длиной волны, равной красной границе фотоэффекта, скорость вылетевших электронов ничтожно мала (равна нулю). В электрическом поле на электрон действует сила $\vec{F} = -e\vec{E}$. Работа этой силы равна изменению кинетической энергии:

$$Fs = \frac{mv^2}{2} - 0 .$$

Получаем

$$v = \sqrt{\frac{2eEs}{m}} = 3 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Дополнительные тестовые задачи с несколькими вопросами

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
112	123	23	232	123	123	212	321	121	21
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
131	323	23	232	34	311	12	13	333	23
21	22	23	24	25	26	27			
415	32	34	31	23	31	253			

ОЛИМПИАДА «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ»

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 4.

Только одна команда может проиграть все встречи. Действительно, если есть две команды, которые проиграли все партии, то во встрече между этими командами нет победителя, что невозможно, так как в волейбольных играх нет ничьих. Значит, одна команда составляет 25% числа всех команд, участвующих в турнире.

2. $x = \arcsin\frac{4}{5} + (2k+1)\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$ или $x = -\arcsin\frac{4}{5} + (2l+1)\pi$, $y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$, $l, m \in \mathbb{Z}$.

Вводя вспомогательный угол $\varphi(y)$, получаем

$$|3\cos x + 4\sin y \sin x| = \sqrt{9 + 16\sin^2 y}\,|\cos(x - \varphi(y))| \le 5 ,$$

а

$$\frac{5}{|\cos(2010y)|} \ge 5 .$$

Поэтому

$$|3\cos x + 4\sin y \sin x| = 5 = \frac{5}{|\cos(2010y)|} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 y = 1, \\ |\cos(2010y)| = 1, \\ |\cos(x - \varphi(y))| = 1. \end{cases}$$

1) Пусть $\sin y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\cos(2010y) = \cos\left(1005\pi + 4020\pi n\right) = -1,$$

и уравнение принимает вид

$$3\cos x + 4\sin x = -5 \Leftrightarrow 5\cos\left(x - \varphi(y)\right) = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \varphi(y)\right) = -1 \Leftrightarrow x = \varphi + (2k+1)\pi, \ k \in \mathbb{Z},$$

где

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{3}{5}, \\ \sin\varphi = \dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

т.е. $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$.

2) Пусть $\sin y = -1 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + (2m+1)\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\cos(2010y) = \cos\left(1005\pi + 2010(2m+1)\pi\right) = -1, \ l \in \mathbb{Z},$$

и уравнение принимает вид

$$3\cos x - 4\sin x = -5 \Leftrightarrow 5\cos\left(x + \varphi(y)\right) = -5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \varphi(y)\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\varphi + (2l+1)\pi, \ l \in \mathbb{Z},$$

где

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{3}{5}, \\ \sin\varphi = \dfrac{4}{5}, \end{cases}$$

т.е. $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$.

3. 55 778.

Пусть x, y – натуральные трехзначные числа, тогда $100 \le x, y \le 999$, и задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 3xy = 1000x + y, \\ 100 \le x, y \le 999. \end{cases}$$

Из первого уравнения получаем

$$y(3x - 1) = 1000x.$$

Заметим, что $3x - 1 \ge 3 \cdot 100 - 1 = 299$. Далее,

$$y = \frac{1000x}{3x-1} = \frac{1000}{3} + \frac{1000}{3(3x-1)},$$

или

$$3y = 1000 + \frac{1000}{3x-1}.$$

Значит, $3x - 1$ – натуральный делитель 1000, т.е. или $3x - 1 = 500$, или $3x - 1 = 1000$. Тогда или $x = 167$, или $x = \frac{1001}{3}$ – не целое.

Тогда $3y = 1000 + \frac{1000}{500} = 1002 \Rightarrow y = 334 \Rightarrow xy = 167 \cdot 334 = 55\ 778$.

4. 2011.

Так как $n\lg 2$ и $n\lg 5$ иррациональны, то $n\lg 2$ можно представить в виде

$$n\lg 2 = x + y, \text{ где } x = [n\lg 2], \ y = \{n\lg 2\} \neq 0,$$

а для $n\lg 5$ справедливо представление

$$n\lg 5 = n\lg\frac{10}{2} = n - n\lg 2 = n - x - y = n - x - 1 + (1 - y).$$

Так как $0 < y < 1$, то $0 < (1 - y) < 1 \Rightarrow [n\lg 5] = n - x - 1$.

Тогда получаем

$$[n\lg 2] + [n\lg 5] = x + (n - x - 1) = n - 1 = 2010 \Rightarrow n = 2011.$$

5. Всегда есть решение: M – середина BH. Если $BH \geq 2AH$, т.е. второе решение: пусть $BD = 2AH$, тогда M – середина HD.

Пусть $x = AH$, $y = HM$, $z = MB$, $h = CH$, $l = CM$ (рис.2) Заметим, что

1) $h^2 = x(y+z)$, 2) $l^2 = h^2 + y^2$.

Так как $AH < AM$, то возможны два случая.

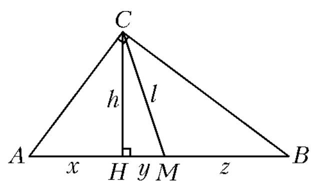


Рис. 2

Первый случай: AM – гипотенуза. Тогда

$$l^2 = h^2 + y^2 = x(y+z) + y^2 = (x+y)^2 - x^2 \Leftrightarrow xy + xz + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 \Leftrightarrow xz = xy \Leftrightarrow y = z,$$

т.е. M – середина HB.

Второй случай: CM – гипотенуза. Тогда

$$l^2 = h^2 + y^2 = x(y+z) + y^2 = (x+y)^2 + x^2 \Leftrightarrow xy + xz + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 + x^2 \Leftrightarrow xz = xy + 2x^2 \Leftrightarrow z = y + 2x.$$

Замечание. Если $BH = 2AH$, то $M = H$, и получаем равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой CH и катетами $AH = AM$ $(H = M) = \dfrac{CH}{\sqrt{2}}$.

6. $k = 3$.

1) $k = 3$. Возможен пример:

$$f(x) = 2x^2 - 1, \ x_1 = -1, \ x_2 = 0, \ x_3 = 1;$$

$$f(x_1) = 1, \ f(0) = -1, \ f(1) = 1.$$

2) $k \geq 4$ невозможно. Пусть арифметическая прогрессия имеет вид x_0, $x_0 + d$, $x_0 + 2d$, $x_0 + 3d$.

Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, тогда

$$b_1 = ax_0^2 + bx_0 + c,$$
$$b_2 = b_1 q = a(x_0 + d)^2 + b(x_0 + d) + c,$$
$$b_3 = b_1 q^2 = a(x_0 + 2d)^2 + b(x_0 + 2d) + c,$$
$$b_4 = b_1 q^3 = a(x_0 + 3d)^2 + b(x_0 + 3d) + c.$$

Найдем разности $b_i - b_{i-1}$:

$$b_2 - b_1 = b_1 q - b_1 = b_1(q-1) = a\left(2x_0 d + d^2\right) + bd;$$
$$b_3 - b_2 = b_1 q^2 - b_1 q = b_1 q(q-1) = a\left(2x_0 d + 3d^2\right) + bd;$$
$$b_4 - b_3 = b_1 q^3 - b_1 q^2 = b_1 q^2(q-1) = a\left(2x_0 d + 5d^2\right) + bd.$$

Вычтем из второго уравнения первое и из третьего уравнения второе:

$$b_3 - 2b_2 + b_1 = b_1 q^2 - 2b_1 q + b_1 = b_1 q(q-1) - b_1(q-1) =$$
$$= b_1(q-1)^2 = 2ad^2,$$
$$b_4 - 2b_3 + b_2 = b_1 q^3 - 2b_1 q^2 + b_1 q = b_1 q^2(q-1) - b_1 q(q-1) =$$
$$= b_1 q(q-1)^2 = 2ad^2.$$

Значит, $b_1(q-1)^2 = b_1 q(q-1)^2$. Так как $b_1 \neq 0$, то $(q-1)^2 = q(q-1)^2 \Leftrightarrow q = 1 \Leftrightarrow b_1 = b_2 = b_3 = b_4$, т.е. $f(x)$ в четырех различных точках принимает равные значения, что невозможно.

7. В направлении l_3.

Заметим, что если e_1, e_2 и e_3 – единичные векторы, образующие углы в $120°$ друг с другом, то

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

и если

$$ke_1 + le_2 + me_3 = 0\ ,$$

то $k = l = m$. Действительно, если, например, $k \neq l$, то так как

$$l\left(e_1 + e_2 + e_3\right) = 0\ ,$$

то

$$0 = ke_1 + le_2 + me_3 - l\left(e_1 + e_2 + e_3\right) = \left(k - l\right)e_1 + \left(m - l\right)e_3\ .$$

Значит,

$$e_1 = \frac{l - m}{k - l} e_3\ ,$$

т.е. векторы e_1 и e_3 коллинеарны, что невозможно.

Пусть Z – точка, в которой находится заяц после очередного прыжка, тогда следующий прыжок добавляет к вектору $\overrightarrow{AZ}$ один из следующих векторов: e_1, $-e_1$, e_2, $-e_2$, e_3 или $-e_3$.

Значит, в момент остановки зайца

$$\overrightarrow{AZ} = ke_1 + le_2 + me_3\ ,$$

где k, l, m – целые числа.

Пусть l – прямая, на которой остановился заяц ($l = l_i$, $i =$ $= 1, 2, 3$). Выберем вектор e_1 так, чтобы он лежал на прямой l, тогда

$$ke_1 + le_2 + me_3 = 2010e_1\ .$$

Откуда

$$\left(k - 2010\right)e_1 + le_2 + me_3 = 0\ .$$

Значит, $k - 2010 = l = m$, поэтому числа k, l и m имеют одинаковую четность. Пусть заяц совершил n прыжков в направлении одной из прямых, например в направлении прямой l. Если все прыжки были в направлении вектора e_1, то $k = n$, если же p прыжков были в направлении вектора $-e_1$ (а остальные $n - p$ – в направлении вектора e_1), то

$$k = n - 2p.$$

Значит, числа k и n имеют одинаковую четность. Пусть n_1, n_2 и n_3 – количество прыжков в направлении прямых l_1, l_2 и l_3 соответственно. Так как числа k, l и m имеют одинаковую четность, то числа n_1, n_2 и n_3 тоже имеют одинаковую четность. Так как заяц прыгал поочередно вдоль прямых, то числа n_1, n_2 и n_3 отличаются друг от друга не более чем на 1, т.е. $n_1 = n_2 = n_3$. Следовательно, последний прыжок был совершен в направлении прямой l_3.

8. $\sqrt{15}$.

Уравнение задачи эквивалентно системе

$$\begin{cases} x \ge 2|y| \ge 0, \\ x^2 - 4y^2 = 4. \end{cases}$$

Ввиду симметрии по y будем считать, что $x \ge 2y \ge 0$.

Пусть $a = 2x - y$, т.е. $2x = y + a$. Значит, нас интересует наименьшее положительное a, при котором есть неотрицательное решение уравнения

$$\left(\frac{y+a}{2}\right)^2 - 4y^2 = 4 \Leftrightarrow -15y^2 + 2ay + a^2 - 16 = 0 .$$

Условие наличия решений этого уравнения

$$0 \le D(a) = a^2 + 15\left(a^2 - 16\right) = 16\left(a^2 - 15\right).$$

Значит, или $a \ge \sqrt{15}$, или $a \le -\sqrt{15}$. При $a = \sqrt{15}$ уравнение принимает вид

$$0 = 15y^2 - 2\sqrt{15}y + 1 = \left(\sqrt{15}y - 1\right)^2 .$$

Значит, $y = \dfrac{1}{\sqrt{15}}$, тогда

$$x = \frac{y+a}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{15}} + \sqrt{15}}{2} = \frac{8}{\sqrt{15}} .$$

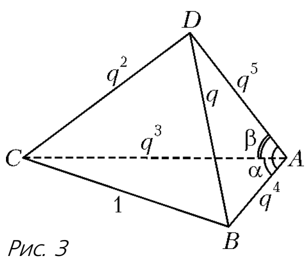


Рис. 3

9. Существует.

С точностью до подобия можно считать, что длины ребер тетраэдра равны $1, q, q^2, q^3, q^4, q^5$; $q = \sqrt[3]{2}$.

Покажем, что такой тетраэдр существует, а именно (рис.3):

$$BC = 1,\ BD = q,\ DC = q^2 ,$$

$$CA = q^3 ,\ BA = q^4 ,\ DA = q^5 .$$

Докажем сначала, что существуют треугольники − грани.

1) $\triangle ABC : 1 + q^3 > q^4$;

2) $\triangle ABD : q + q^4 > q^5$;

3) $\triangle ACD :\ q^2 + q^3 > q^5$;

4) $\triangle BCD :\ 1 + q > q^2$.

Условия 1) и 2) равносильны, а $1 + q^3 > q^4$, т.е. $1 + 2 > 2\sqrt[3]{2}$, верно, так как 27 > 16.

Условие 3): $1+\sqrt[3]{4}>2$, так как $\sqrt[3]{4}>1$ $(4>1)$.

Условие 4): $1+\sqrt[3]{2}>\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow 1+\sqrt[3]{2}>\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}>2$ – верно, так как $\sqrt[3]{2}>1$ и $\sqrt[3]{4}>1$.

Итак, треугольники граней существуют. Докажем, что из них можно сложить тетраэдр. $\triangle ABC \sim \triangle ABD$ с коэффициентом подобия q. Значит, $\angle BAC=\angle BAD=\alpha$. Пусть $\angle CAD=\beta$. Для того чтобы можно было сложить тетраэдр, достаточно доказать, что существует трехгранный угол с плоскими углами α, α и β, что равносильно существованию решения системы

$$\begin{cases}\alpha,\beta>0,\\ 2\alpha+\beta<2\pi,\\ 2\alpha>\beta.\end{cases}$$

Из теоремы косинусов получаем ($q=\sqrt[3]{2}$, $q^3=2$, $q^6=4$, $q^9=8$)

$$\cos\alpha=\frac{q^6+q^8-1}{2q^7}=\frac{4+\dfrac{8}{q}-1}{2\cdot 4\cdot q}=\frac{8+3q}{8q^2};$$

$$\cos\beta=\frac{q^6+q^{10}-q^4}{2q^8}=\frac{q^2+q^6-1}{2q^4}=\frac{4+\dfrac{2}{q}-1}{4q}=\frac{2+3q}{4q^2}.$$

Значит, $0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Далее,

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\left(\frac{8+3q}{8q^2}\right)^2-1=\frac{2\left(64+48q+9q^2\right)}{64q^4}=$$

$$=\frac{128+96q+18q^2-128q}{128q}=\frac{18q^2-32q+128}{128q}=$$

$$=\frac{9q^2-16q+64}{64q}>0 \Leftrightarrow 9q^2-16q+64>0,$$

так как выполнены оценки: $16q<16q^3=32<64<64+9q^2$.

$$2\alpha>\beta \Leftrightarrow \cos 2\alpha<\cos\beta \Leftrightarrow \frac{9q^2-16q+64}{64q}<\frac{2+3q}{4q^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9q^3-16q^2+64q<32+48q \Leftrightarrow f(q)=9q^3-16q^2+16q-32<0.$$

Действительно,

$$f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 9 \cdot 2 - \frac{32}{q} + 16q - 32 =$$

$$= 16q - \frac{32}{q} - 14 = \frac{16q^2 - 14q - 32}{q} = \frac{2}{q}\left(8q^2 - 7q - 16\right).$$

Пусть $\varphi(q) = \left(8q^2 - 7q - 16\right)$. Так как

$$\sqrt[3]{2} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2 < \frac{27}{8} \Leftrightarrow 16 < 27 \Leftrightarrow \text{ и } \varphi(1) = 8 - 7 - 16 = -15,$$

$$\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = 8\frac{9}{4} - \frac{7 \cdot 3}{2} - 16 = 18 - 16 - \frac{21}{2} = -\frac{17}{2} < 0 \text{, то } \varphi\left(\sqrt[3]{2}\right) < 0.$$

Замечания

1. Приведенное расположение граней не единственно возможное.

2. Вторую часть (возможность сложить из треугольников тетраэдр) обязательно надо доказывать, так как существует пример, когда из четырех треугольников с совместимыми сторонами нельзя сложить тетраэдр.

10. 252.

Простых чисел, меньших 30, десять штук: это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29. Пусть p_1, p_2, ..., p_{10} – какая-нибудь перестановка этих чисел. Заметим, что различных перестановок из 10 чисел всего $10! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 10$ (вообще $n!$ – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n). Действительно, число p_1 можно выбрать 10 способами, p_2 – 9 способами, p_3 – 8 способами и т.д.

Рассмотрим «цепь»

$$1, p_1, p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot p_2 \cdot p_3, \ldots, p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_{10} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

1) Каждое число в цепи делится на предыдущее и является делителем последующего.

2) В множество M может входить только одно число из цепи.

3) Таких цепей 10! штук.

4) Пусть число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ ($1 \le k \le 9$) входит в множество M, тогда число цепей, содержащих $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, равно $k!(10 - k)!$. Действительно, для того чтобы цепь содержала это число, вначале, при построении цепочки, выбираются в любом порядке числа p_1, p_2, ..., p_k, а затем в любом порядке оставшиеся $10 - k$ чисел.

5) Выясним, при каком k число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ «занимает»

наименьшее число цепей. Сравним по величине числа

$$k!(10-k)! \text{ и } (k+1)(10-k-1)!,$$

$k!(10-k)! >$

$$> (k+1)!\,(10-k-1)! \Leftrightarrow 10-k > k+1 \Leftrightarrow 2k < 9.$$

Значит, $k!(10-k)!$ при $k \le 5$ убывает, а при $k \ge 5$ возрастает. Поэтому наименьшее значение достигается при $k = 5$ и равно $5!5!$.

6) Включая число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$ в M, мы тем самым «запрещаем» включать все другие числа из цепей, «проходящих» через $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$. Поэтому в M можно включить не более чем

$$\frac{10!}{5!5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$

числа.

7) Покажем, что можно построить множество M, состоящее из 252 чисел, удовлетворяющих условиям задачи. Действительно, пусть M = { $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_5$, где p_1, p_2, ..., p_5 – различные числа из набора 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и 29}.

В этом множестве ровно 252 числа.

Вариант 2

1. 16 см и 8 см.

Пусть V – объем банки с соком, s и S – площади оснований стаканов, h_1 и H_1 – уровни сока в обоих стаканах в первом случае, а h_2 и H_2 – во втором. Введем обозначения: $x = \frac{s}{V}$, $y = \frac{S}{V}$. Из условий задачи получаем систему

$$\begin{cases} h_1x + H_1y = 1, \\ h_2x + H_2y = 1, \end{cases}$$

откуда $x = \dfrac{H_2 - H_1}{H_2h_1 - H_1h_2}$, $y = \dfrac{h_2 - h_1}{H_2h_1 - H_1h_2}$. Значит, искомые уровни в стаканах равны $\dfrac{1}{2x}$ и $\dfrac{1}{2y}$.

2. Два решения: $\arcsin\frac{1}{3}$ и $\pi - \arcsin\frac{1}{3}$.

Уравнение сводится к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = \dfrac{1}{3}, \\ \operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Если $\sin x = \dfrac{1}{3}$, то возможны варианты: 1) $\cos x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, 2) $\cos x = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. Во втором случае $\operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$, поэтому на $[0;\pi]$ будет только два решения уравнения: $\arcsin\dfrac{1}{3}$ и $\pi - \arcsin\dfrac{1}{3}$.

3. $\dfrac{1}{2}$, 2, 8, 32, 128.

Пусть $b_n = b_1 q^{n-1}$, $b_1 > 0$, $q > 0$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда

$$15 = \log_2\left(b_1^5 q^{10}\right) = 5\log_2\left(b_1 q^2\right).$$

Значит, $b_1 q^2 = 8$ и второе условие задачи приводит к квадратному уравнению относительно $\log_2 b_1$.

4. $\dfrac{a+b}{2a+b} = \dfrac{7}{10}$.

Треугольник CKL − равнобедренный, поэтому CO − биссектриса угла C. Значит,

$$\frac{AO}{OB} = \frac{AC}{BC} = \frac{a+b}{2a+b},$$

где $a = CK = CL = MB$, $b = AK = LM$.

5. $a \ge -1$.

Перепишем неравенство в виде

$$(a+1)(x-2)^2 + (b-1)\left(x^2 + 3x - 2\right) \ge 0.$$

Если $a \ge -1$, то для любого b это неравенство имеет решения: его решениями будут, например, корни уравнения $x^2 + 3x - 2 = 0$.

Для любого $a < -1$ (так как корни уравнения лежат левее 2) найдется b такое, что для любого x левая часть неравенства отрицательна.

6. 16.

Пусть V и v − объемы пирамид $SABCD$ и $SKLMN$, соответственно, $SA = SB = SC = SD = l$, $SK = a$, $SL = b$, $SM = c$, $SN = d$.

Докажем, что

1) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{d}$; 2) $a = c$.

1) Воспользовавшись тем, что отношение объемов двух пирамид с ребрами, лежащими на ребрах некоторого трехгранного угла, равно отношению произведений длин этих ребер, получаем:

$$\frac{2v}{V} = \frac{V_{SKMN}}{V_{SABC}} + \frac{V_{SKLM}}{V_{SACD}} = \frac{acd + abc}{l^3}$$

аналогично,

$$\frac{2v}{V}=\frac{V_{SKLN}}{V_{SBCD}}+\frac{V_{SLMN}}{V_{SABD}}=\frac{abd+bcd}{l^3}.$$

Значит,

$$acd+abc=abd+bcd,$$

или

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

2) Докажем, что из условия перпендикулярности диагоналей сечения ($MK \perp NL$) правильной четырехугольной пирамиды следует, что или $a=c$, или $b=d$ (или $SQ \perp MK$, или $SQ \perp NL$, где Q – точка пересечения MK и NL).

Пусть $b \neq d$. Если $a \neq c$, то рассмотрим точку K' на ребре SA такую, что $SK'=SK$. Тогда

$$\angle NQK'=\frac{\pi}{2}=\angle NQK \Rightarrow NL \parallel BD \Rightarrow b=d \text{ – противоречие.}$$

По условию $b \neq d = 3b$, значит, $a=c$.

Из 1), 2) и условий задачи получаем

$$\frac{2}{a}=\frac{1}{3b}+\frac{1}{b}=\frac{4}{3b} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$S_{SNL}=\frac{bd}{ac}S_{SMK}=3\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2\cdot 12=3\cdot\frac{4}{9}\cdot 12=16.$$

ОЛИМПИАДА «ЛОМОНОСОВ-2010»

МАТЕМАТИКА

1. $x \in [-1;3]$.

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \le \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^{-(\log_3 2)^{2x-1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 3)^{4-x^2} \ge (\log_3 2)^{2x-1} \Leftrightarrow 4-x^2 \ge 1-2x \Leftrightarrow x \in [-1;3].$$

2. $\frac{6}{25}$.

Треугольники ADE и EFC подобны треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{5}$ соответственно. Так как $DBFE$ – параллелограмм, то $S_{DEF}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{25}-\frac{9}{25}\right)S_{ABC}=\frac{6}{25}S_{ABC}$.

3. 8.

Если сначала в общем вкладе y (млн р.) указанный вкладчик имел x, а всего он добавляет z, то

$$\begin{cases} 0{,}04 = \dfrac{x+1}{y+1} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{y-x}{y(y+1)}, \\ 0{,}06 = \dfrac{x+2}{y+2} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{2(y-x)}{y(y+2)}, \\ 0{,}10 = \dfrac{x+z}{y+z} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{z(y-x)}{y(y+z)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{0{,}04}{0{,}06} = \dfrac{y+2}{2(y+1)}, \\ \dfrac{0{,}04}{0{,}10} = \dfrac{y+z}{z(y+1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4y+4 = 3y+6, \\ 2z(y+1) = 5y+5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ z = 10. \end{cases}$$

4. $x \in \left(-4; -3 + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right]$.

Так как $x \in (-4;-2)$, то, домножив неравенство на $\sqrt{(x+4)(-x-2)}$, приведем его к равносильному:

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{-x-2} \le 1 + \sqrt{(x+4)(-x-2)}.$$

Введем обозначение $t = \sqrt{(x+4)(-x-2)} > 0$.

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{-x-2} < 0, \\ x \in (-4;-2) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-4;-3)$.

2) $\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{-x-2} \ge 0, \\ 2 - 2t \le 1 + 2t + t^2, \\ x \in (-4;-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3;-2), \\ t \ge \sqrt{5} - 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-3;-2), \\ x^2 + 6x + 17 - 4\sqrt{5} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[-3; -3 + 2\sqrt{\sqrt{5}-2}\right].$$

5. 54, 72, 96 и 128.

Решим задачу в общем виде.

Пусть первое число равно $\nu^a \cdot \mu^b$, а второе – $\nu^c \cdot \mu^d$, где a, b, c, d – конкретные целые неотрицательные числа, а ν, μ – различные простые числа (у нас $\nu = 2$, $\mu = 3$, $a = 1$, $b = 3$, $c =$

$=7$, $d=0$). Из условия задачи следует, что существуют такие ненулевые b_1, q и различные натуральные n, m, k, что

$$\nu^a \cdot \mu^b = b_1 \cdot q^{n-1}, \ \nu^c \cdot \mu^d = b_1 \cdot q^{m-1}, \ N = b_1 \cdot q^{k-1},$$

где N − искомое натуральное число. Исключая b_1 и q из этих уравнений, получаем

$$N^m \cdot \nu^{ak+cn} \cdot \mu^{bk+dn} = N^n \cdot \nu^{am+ck} \cdot \mu^{bm+dk}.$$

Отсюда, во-первых, $N = \nu^x \cdot \mu^y$ для некоторых неотрицательных целых x, y и, во-вторых,

$$\nu^{xm+ak+cn} \cdot \mu^{ym+bk+dn} = \nu^{xn+am+ck} \cdot \mu^{yn+bm+dk},$$

поэтому

$$\begin{cases} xm+ak+cn = xn+am+ck, \\ ym+bk+dn = yn+bm+dk \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (m-n)(x-a) = (n-k)(a-c), \\ (m-n)(y-b) = (n-k)(b-d) \end{cases} \Rightarrow \frac{x-a}{a-c} = \frac{y-b}{b-d}.$$

В итоге для x, y получается уравнение $x+2y=7$. Оно имеет четыре пары решений в целых неотрицательных числах: (7; 0), (5;1), (3;2), (1;3), которые и определяют четыре натуральных члена прогрессии (два из них даны в условии).

6. $y = \dfrac{1}{25x^2} + 2$ при $-\dfrac{1}{5} \le x < 0$.

Любая точка $(x; y; z)$ данной кривой удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} 5x + \cos z = 0, \\ z = \operatorname{arctg}\sqrt{y-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos z = -5x, \\ y - 3 = \operatorname{tg}^2 z = \dfrac{1}{\cos^2 z} - 1, \\ 0 \le z < \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{25x^2} + 2, \\ -1 \le 5x < 0, \end{cases}$$

причем любая пара $(x; y)$, удовлетворяющая последней системе, хотя бы при одном значении z удовлетворяет и первой.

7. $a < 13\sqrt{5} - 5$.

Преобразуем второе уравнение системы, получим

$$12\left(\frac{1-\cos 2\pi x}{2}\right)^2 - \left(2\cos^2 2\pi x - 1\right) - 11 = 0,$$

$$3\left(1 - 2z + z^2\right) - 2z^2 - 10 = 0 \ \text{(где } \cos 2\pi x = z\text{)},$$

$$z^2 - 6z - 7 = 0.$$

1) $\cos 2\pi x = 7$ − нет решений;

2) $\cos 2\pi x = -1$, $2\pi x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{1}{2} + n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Обозначим $5^x = t$, тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} t = 5^n\sqrt{5}, \\ t^2 - 13t < -a. \end{cases}$$

Вершина параболы $y = f(t) = t^2 - 13t$ находится в точке $t = \frac{13}{2}$ и $\sqrt{5} < \frac{13}{2} < 5\sqrt{5}$ (так как $5 < \frac{169}{4} < 125$). Поскольку $\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5} > 13$ (так как $180 > 169$), то $5\sqrt{5} - \frac{13}{2} > \frac{13}{2} - \sqrt{5}$, т.е. точка $\sqrt{5}$ лежит ближе к $\frac{13}{2}$, чем $5\sqrt{5}$. Поэтому $f\left(\sqrt{5}\right) < f\left(5\sqrt{5}\right)$ и система имеет решение тогда и только тогда, когда $f\left(\sqrt{5}\right) < -a$. Получаем: $5 - 13\sqrt{5} < -a$ и $a < 13\sqrt{5} - 5$.

8. 4.

Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 – площади треугольников ABC, MBC, NBC, SBC соответственно, h_1, h_2, h_3, h_4 – высоты треугольников ABC, BMC, BNC, BCS соответственно, опущенные из вершин A, M, N и S на сторону BC, а π – плоскость, проходящая через точку B, перпендикулярная ребру BC. Рассмотрим ортогональные проекции точек A, B, C, S, M и N на плоскость π – это точки A', B', C', S', M' и N' соответственно.

Тогда $B' = C' = B$, $A'M' = M'N' = N'S' = a$, $A'B = h_1$, $M'B = h_2$, $N'B = h_3$, $S'B = h_4$. Так как $M'B = h_2$ – медиана треугольника $A'BN'$, а $N'B$ – медиана треугольника $M'BS'$, то

$$2h_1^2 + 2h_3^2 - 4h_2^2 = 4a^2 = 2h_2^2 + 2h_4^2 - 4h_3^2,$$

или $h_3 = \sqrt{h_2^2 + \frac{h_4^2 - h_1^2}{3}}$. Так как площади S_1, S_2, S_3, S_4 пропорциональны высотам h_1, h_2, h_3, h_4 (с коэффициентом пропорциональности $\frac{BC}{2}$), то

$$S_3 = \sqrt{S_2^2 + \frac{S_4^2 - S_1^2}{3}} = \sqrt{4 + \frac{37 - 1}{3}} = 4.$$

9. а) Да; б) нет.

а) Ваня при любых начальных коэффициентах квадратного трехчлена, независимо от действий Тани, за конечное число шагов (либо своим ходом, либо ходом Тани) может обеспечить равенство нулю значения квадратного трехчлена в точке $x = 1$.

б) Таня все время должна действовать так, чтобы коэффициент при x равнялся 7 или 8. В этом случае, как бы ни действовал мальчик, у получающихся квадратных трехчленов целых корней не будет.

В самом деле, после любого числа шагов трехчлен будет иметь вид $x^2 + 7x + 47 - 3n$ или $x^2 + 8x + 47 - 3k$ для некоторых целых n и k. Но эти многочлены целых корней не имеют. Действительно, в противном случае существовали бы такие целые x и n (k), что $3n = x^2 + 7x + 47$ ($3k = x^2 + 8x + 47$). Но это невозможно, так как левая часть в этих равенствах кратна трем, а правая – нет.

10. 12.

Проведем через точку O общую касательную к окружностям и обозначим через P точку пересечения касательной с основанием AD. $\angle OAP = \angle AOP = \alpha$, $\angle ODP = \angle DOP = \beta$. Так как $\pi - 2\alpha + \pi - 2\beta = \pi$, то $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ и, следовательно, ΔAOD и ΔCOB прямоугольные, причём $\Delta COB \sim \Delta AOD$ с коэффициентом подобия $\dfrac{1}{3}$, откуда следует, что $OC = \dfrac{1}{3}AO$ и $BO = \dfrac{1}{3}OD$. Тогда

$$AC = AO + OC = \frac{4}{3}AO, \quad BD = BO + OD = \frac{4}{3}OD.$$

Кроме того, $\Delta AKC \sim \Delta AOK$ ($\angle KAO$ – общий, а $\angle ACK = \angle AKO = \alpha$). Следовательно,

$$\frac{AK}{AO} = \frac{AC}{AK} \Rightarrow AK^2 = AO \cdot AC = \frac{4}{3}AO^2.$$

Аналогично, $\Delta DLB \sim \Delta DOL$ ($\angle LDB$ – общий, а $\angle LBD = {}$ $= \angle DLO = \beta$). Следовательно,

$$\frac{DL}{DO} = \frac{DB}{DL} \Rightarrow DL^2 = DO \cdot DB = \frac{4}{3}OD^2.$$

В итоге получаем:

$$AK^2 + DL^2 = \frac{4}{3}\left(AO^2 + OD^2\right) = 3 \cdot 4 = 12.$$

МЕХАНИКА

1. а) 17:55; б) 30 км/ч.

а) Свяжем систему координат с первым мотоциклистом и обозначим его положение точкой A (рис.4). Положения второго мотоциклиста: в первый момент времени – точка B, во второй момент – C, в третий – D. Тогда $AB = 40$, $AC = 30$, $AD = 30$. Минимальное расстояние – это высота (она же медиана) треугольника ACD, поэтому соответствующий момент времени равен 17:55.

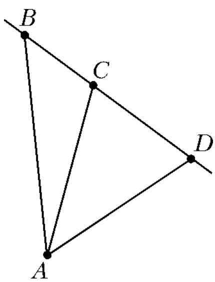


Рис. 4

б) Так как $BC : CD = AB : AD = 4 : 3$, то AC – биссектриса треугольника BAD. По формуле длины биссектрисы, $30^2 = 40 \cdot 30 - 4x \cdot 3x$, где $BC = 4x$, $CD = 3x$. Поэтому $x = 5$ км, $CD = 3x = 15$ км. Значит, искомая относительная скорость равна 15 км/0,5 ч = 30 км/ч.

2. 4 : 3.

Для спускаемого аппарата A имеем

$$P = T + Q,$$

где P – сила тяжести, Q – сила сопротивления воздуха, T – сила тяги тормозного двигателя. По условию для аппарата $Б$ сила тяги равна $33T$. Так как аппарат $Б$ имеет втрое больший диаметр, то для него сила тяжести равна $27P$ (масса пропорциональна объему), а сила сопротивления воздуха (пропорциональная площади поверхности) равна $9Q$. Значит, для аппарата $Б$ имеем

$$27P = 33T + 9Q.$$

Из получившейся системы уравнений находим

$$\frac{P}{T} = \frac{4}{3}.$$

3. а) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ мин; б) успеет.

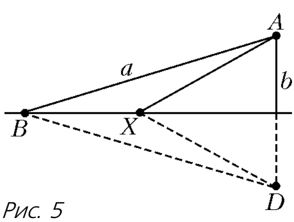


Рис. 5

а) Введем такие обозначения (рис.5): точка A – колодец, B – богатырь, X – точка на дороге, от которой богатырь должен пойти к колодцу по бездорожью, v – скорость по бездорожью, $AB = a = 1400$ м, $b = 200$ м. Если построить точку D симметрично точке A относительно дороги, то, из-за того что скорости отличаются в 2 раза, получается такая задача: нужно найти на высоте равнобедренного треугольника ABD такую точку X, чтобы сумма расстояний от X до вершин A, B и D была минимально возможной. Минимум суммы достигается при условии $\angle BXA = \angle AXD = \angle BXD = 120°$ (при другом расположении точки X сумма расстояний будет больше). Поэтому время в пути равно

$$t = \frac{AX}{v} + \frac{BX}{2v} = \frac{2b/\sqrt{3}}{v} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{\left(2b/\sqrt{3}\right)^2 - b^2}}{2v} =$$

$$= \frac{b\sqrt{3} + \sqrt{a^2 - b^2}}{2v} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ мин}.$$

б) При ответе на второй вопрос нужно сравнить числа $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ (заметим, что это примерно равно 12,99) и 13, или $15\sqrt{3}$ и 26. После возведения в квадрат получается $675 < 676$, т.е. $\frac{15\sqrt{3}}{2} < 13$. Значит, богатырь успеет добраться.

Имеется и алгебраическое решение, связанное с минимизацией времени:

$$\frac{x}{v} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - b^2}}{2v} = \frac{2x + \sqrt{a^2 - b^2} - \sqrt{x^2 - b^2}}{2v},$$

где $x = AX$. Минимум $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 - b^2}$ можно найти, например, с помощью производной.

4. Первой прыгает Лягушка, а за ней – Лягушонок, причем в том же направлении. Максимальная скорость дощечки равна 1,4 м/с.

Если лягушки прыгают одновременно, то, по закону сохранения импульса,

$$0 = (M_1 + M_2)(v - u) - mu,$$

где M_1 и M_2 – массы Лягушки и Лягушонка соответственно, v – скорость лягушек относительно дощечки, u – скорость дощечки после прыжка, m – масса дощечки. Отсюда получаем

$$u = \frac{(M_1 + M_2)v}{m + M_1 + M_2}.$$

Заметим, что множитель $(v - u)$ выражает собой скорость прыгнувших лягушек относительно воды.

Если первым прыгнул Лягушонок, то, по закону сохранения импульса,

$$0 = M_2 (v - u_0) - (m + M_1) u_0 ,$$

где u_0 – скорость дощечки после его прыжка, откуда

$$u_0 = \frac{M_2 v}{m + M_1 + M_2} .$$

После прыжка Лягушки в том же направлении, по закону сохранения импульса,

$$-(m + M_1) u_0 = M_1 (v - u_1) - m u_1 ,$$

откуда скорость дощечки после второго прыжка будет

$$u_1 = \frac{(m + M_1) u_0 + M_1 v}{m + M_1} = \frac{M_1 v}{m + M_1} + \frac{M_2 v}{m + M_1 + M_2} .$$

Если первой прыгнула Лягушка, а за ней прыгнул Лягушонок, то, аналогично предыдущему, скорость дощечки будет

$$u_2 = \frac{M_2 v}{m + M_2} + \frac{M_1 v}{m + M_1 + M_2} .$$

Подстановка заданных в условии числовых значений дает: $u = 1{,}2$ м/с, $u_1 = 1{,}36$ м/с, $u_2 = 1{,}4$ м/с. Таким образом, дощечка приобретет максимальную скорость, равную $u_2 = 1{,}4$ м/с, если первой прыгнет Лягушка, а за ней – Лягушонок.

5. $f(x_1) < f(x_2)$**.**

Корни уравнения: $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{2}}{7}$, $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{2}}{7}$. Преобразуем функцию $f(x)$, выделив квадратный трехчлен:

$$\begin{aligned} f(x) &= 21x^5 + 32x^4 - 6x^3 - 9x^2 + 4x + 3 + \sin x = \\ &= 3x^3 \left(7x^2 + 6x + 1\right) + 2x^2 \left(7x^2 + 6x + 1\right) - \\ &- 3x\left(7x^2 + 6x + 1\right) + \left(7x^2 + 6x + 1\right) + x + 2 + \sin x = \\ &= \left(3x^3 + 2x^2 - 3x + 1\right)\left(7x^2 + 6x + 1\right) + g(x) , \end{aligned}$$

где $g(x) = x + 2 + \sin x$. Поскольку $7x^2 + 6x + 1 = 0$, получаем $f(x_1) = g(x_1)$ и $f(x_2) = g(x_2)$. Так как $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < 0$, а функция $g(x)$ возрастает в четвертой четверти, то $g(x_1) < g(x_2)$, и поэтому $f(x_1) < f(x_2)$.

6. 363 К $= 90$ °С .

Ось x направим вверх, ноль возьмем на высоте h, заметив, что $h = \frac{p_0}{\rho g} = 10$ м. Найдем зависимость положения поршня x от температуры. Запишем условие равновесия − равенство давлений на поршень сверху и снизу:

$$p_0 + \rho g\left(L - h - x\right) = 1{,}75 p_0 \frac{h}{h+x}\frac{T}{T_0},$$

или

$$\frac{7}{4} p_0 h \frac{T}{T_0} = \rho g\left(L - x\right)\left(h + x\right).$$

Это означает, что график зависимости T от x представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, и с корнями $x_1 = -h$ и $x_2 = L$. Следовательно, максимум температуры достигается в вершине параболы − в точке $x_0 = \frac{L-h}{2}$. Поэтому

$$T_{\max} = \frac{T_0}{7}\left(1 + \frac{L}{h}\right)^2 = \frac{121}{112} T_0 = 363\,\text{K}.$$

Это и есть та температура, до которой необходимо нагреть нижнюю камеру реактора.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ – ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ

Межрегиональная многопрофильная олимпиада

МАТЕМАТИКА

I этап

1. 152. **2.** 17. **3.** 4. **4.** 377. **5.** 35. **6.** 216. **7.** 0. **8.** 11. **9.** 12. **10.** 2.

ИНСТИТУТ КРИПТОГРАФИИ, СВЯЗИ И ИНФОРМАТИКИ АКАДЕМИИ ФСБ РОССИИ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $a_{34} = \frac{71}{12}$. **2.** $3 + \sqrt{35}; 0$. **3.** -1. **4.** 39.

5. $-\dfrac{\arccos\dfrac{3}{5}}{14}+\dfrac{\pi n}{7}$; $\dfrac{\arccos\dfrac{3}{5}}{8}+\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$.

6. $|a|>1/2$; $|a|\neq 1$.

Вариант 2

1. $a_{40}=-\dfrac{64}{5}$. **2.** $2+\sqrt{23}; 0$. **3.** -1. **4.** 23.

5. $\dfrac{\arccos\dfrac{5}{7}}{4}+\dfrac{\pi n}{2}$; $-\dfrac{\arccos\dfrac{5}{7}}{10}+\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbb{Z}$.

6. $(5/6;1)\cup(1;5/3)\cup(5/2;+\infty)$.

Вариант 3

1. 6 часов 33 минуты.

2. $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg}\left(2+\sqrt{3}\right)+\pi m$; $\operatorname{arctg}\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi k$, $m,n,k\in\mathbb{Z}$.

3. -4; $1+4\sqrt{3}$; 1. **4.** $\dfrac{S}{10}$.

5. $(-\infty;3)\cup(8;13)$. **6.** $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Вариант 4

1. 12 часов 36 минут.

2. $\dfrac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arcctg}\left(-2+\sqrt{3}\right)+\pi m$; $\operatorname{arcctg}\left(-2-\sqrt{3}\right)+\pi k$, $m,n,k\in\mathbb{Z}$.

3. -2; $\sqrt{15}-3$. **4.** $\dfrac{5S}{9}$.

5. $(-11;-6)\cup(-1;+\infty)$. **6.** $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

Задачи ежегодной олимпиады

1. 12 часов 45 минут. **2.** $\left[-2-\sqrt{4+\cos\dfrac{3}{2}};0\right)$.

3. $\dfrac{S_{QRTF}}{S_{ABCD}}=\dfrac{2}{15}$.

4. При $a\in\left(-\infty;-2-\sqrt{8}\right]\cup\left[-2+\sqrt{8};+\infty\right)$ решения есть.

5. 481 и 74 или 74 и 481. **6.** Неверно.

ФИЗИКА

Задачи ежегодной олимпиады

1. $u_1 = \dfrac{v + (c/n)}{1 + \left(v/(nc)\right)}$. **2.** $D_1 = \dfrac{\nu_2 D_2}{\nu_1} = 100$ мм.

3. $v_2 = v + \dfrac{m(v + v_1)}{M} = 2{,}25$ м/с.

4. $n = \left(\dfrac{p}{p_0} - 1\right)\dfrac{VT_0}{V_0 T} = 637$.

5. $Q_1 = -Q_2 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0 a_1 a_2 R_1 \mathscr{E}}{(a_1 + a_2)(R_1 + R_2)}$.

6. $\alpha = 2\arccos\dfrac{n}{2} \approx 74°$. **7.** $m = \dfrac{r m_1}{\lambda + r} \approx 0{,}035$ кг.

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $s = \dfrac{2v_2^2 L}{v_2^2 - v_1^2} = 7{,}2$ км. **2.** $A' = \dfrac{5A}{3} = 5$ Дж.

3. $E_{\text{сум}} = \dfrac{3}{2}pV = 6 \cdot 10^3$ Дж. **4.** $\varphi = \dfrac{16\rho I}{\pi D d^2} \approx 1{,}11$ Тл/с.

5. Для преломленного луча $\delta_{\text{пр}} = \alpha - \arcsin\dfrac{\sin\alpha}{n} \approx 19°$, для отраженного от поверхности стекла луча $\delta_{\text{отр}} = 180° - 2\alpha = 90°$.

Вариант 2

1. $t_2 = \dfrac{(v_1 + v_2)t_1}{v_2} = 16$ мин. **2.** $A' = 3A = 3$ Дж.

3. $E_{\text{ср}} = \dfrac{3}{2}pV\dfrac{\text{M}}{N_{\text{A}} m} \approx 3 \cdot 10^{-20}$ Дж.

4. $I = \dfrac{\Delta B a S}{4\rho\Delta t} = 2$ А. **5.** $\delta = \arcsin\dfrac{n_2 \sin\alpha}{n_1} \approx 50{,}6°$.

Вариант 3

1. $\tau = \dfrac{t}{2} = 3$ с. **2.** $m = \dfrac{k\left(A^2 - x^2\right)}{v^2} = 0{,}2$ кг.

3. $A = Q + \dfrac{3}{2}R\nu|\Delta T| \approx 14{,}5$ кДж. **4.** $R_x = \dfrac{R_0}{\sqrt{2}} \approx 20$ Ом.

5. $\lambda_ж = \lambda_в \sin\theta_{пр} = 300$ нм.

Вариант 4

1. $a = \dfrac{2l(t_2 - t_1)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 3{,}2$ м/с^2.

2. $x = \sqrt{\dfrac{m\left(v_m^2 - v^2\right)}{k}} = 0{,}06$ м.

3. $\Delta T = \dfrac{2(Q - A)}{3\nu R} \approx 152$ К. **4.** $\mathscr{E} = 3IR = 300$ В.

5. $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1 \sin\beta}{\sin\alpha} \approx 606$ нм.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОННОЙ ТЕХНИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ФИЗИКА

Интернет-олимпиада «Поверь в себя!»

Задачи первого тура

10 класс

1. $h = 15$ м. **2.** 3. **3.** $v_1/v_2 = 2$. **4.** 11,5. **5.** $\Delta T = 0{,}3$ К. **6.** $Q/q = 1$. **7.** $v = 2$ м/с. **8.** $C = 2$ мкФ. **9.** $R = 10$ Ом. **10.** $v = 50$ м/с.

11 класс

1. $h = 30$ м. **2.** $a_2 = 0{,}15$ м/с^2. **3.** $v = 1$ м/с. **4.** 18%. **5.** $q_2 = -8$ нКл. **6.** $U = 3$ В. **7.** $n = 1{,}7$. **8.** $F = 1$ Н. **9.** $a = 10$ м/с^2. **10.** $t = 5$ мс.

Задачи второго тура

10 класс

1. $t = 20$ с. **2.** $\varphi = 30°$. **3.** $T = 0{,}44$ с. **4.** $A = 0{,}15$ Дж. **5.** $\rho = 10$ г/см^3. **6.** $m = 18$ кг. **7.** $\Delta T_2 = 15$ К. **8.** $q = 0{,}4$ мкКл. **9.** $Q = 4$ мДж. **10.** $I = 2$ А.

11 класс

1. $v = 10$ м/с. **2.** $F = 75$ Н. **3.** $v_2 = 2$ м/с. **4.** $Q_2 = 400$ Дж. **5.** $q_2/q_1 = -2$. **6.** $Q = 5$ мДж. **7.** $B = 0{,}1$ Тл. **8.** $E_i = 0{,}01$ В. **9.** $L = 4$ м. **10.** 500.

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э.БАУМАНА

ФИЗИКА

Вариант 1

1. $v = 0$. **2.** $F = \mu mg$. **3.** $Q = \dfrac{mv_0^2}{2} + mgh$.

4. $U = \dfrac{3}{2}pV = 9 \cdot 10^3$ Дж. **5.** $x = 0,1\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ (м).

6. Увеличить в 4 раза. **7.** $q_C = \dfrac{4}{9}C\mathcal{E}$.

8. $A = \dfrac{1}{2}\nu R\alpha\left(V_2^2 - V_1^2\right) = 1,33 \cdot 10^{-1}$ Дж. *Указание.* Покажите, что в заданном процессе давление газа линейно зависит от его объема.

9. $p_1 = p_2 - F\Delta t = 12$ кг · м/с.

10. При постоянной скорости перемещения перемычки мощность силы тяжести, действующей на перемычку, равна электрической мощности, выделяющейся на сопротивлении R:

$$Fv = \frac{\mathcal{E}^2}{R}, \text{ или } mg\sin\alpha \cdot v = \frac{\mathcal{E}^2}{R}, \text{ где } \mathcal{E} = vBL.$$

Отсюда получаем

$$v = \frac{mgR\sin\alpha}{B^2L^2}.$$

Вариант 2

1. $p = mv = mx' = m(4 - 4t) = 0$.

2. $a_{\max} = v\sqrt{\dfrac{k}{m}} = 10$ м/с^2. **3.** $T = \dfrac{mg\sqrt{3}}{4}$.

4. Если брусок массой m остается неподвижным при смещении на x бруска массой $2m$, то сила F совершает работу по растяжению пружины и против сил трения (при условии, что в конечный момент скорость бруска массой $2m$ обращается в ноль):

$$Fx = \frac{kx^2}{2} + \mu \cdot 2mgx, \text{ или } F = \frac{kx}{2} + \mu \cdot 2mg.$$

Уравнение движения бруска массой m имеет вид

$$ma = kx - \mu mg.$$

Брусок массой m сдвинется при условии $a \geq 0$, т.е. $kx \geq \mu \cdot mg$.

Минимальное значение силы получим, если положим $kx = \mu mg$. Таким образом,

$$F_{\min} = \frac{5}{2}\mu mg .$$

5. $Q_{12} = \nu RT_1 \approx 2{,}5$ кДж.

6. $A = 0$. *Указание.* $A = q(\varphi_\infty - \varphi_B)$, где $\varphi_B = k\frac{2q}{L} + k\frac{q}{L} - k\frac{6q}{2L} = 0$.

7. $\mathcal{E} = 31$ В.

8. См. рис.6.

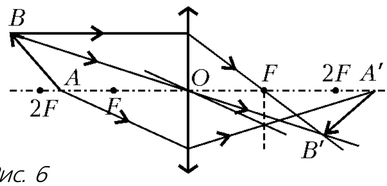


Рис. 6

9. $\varepsilon = A + \frac{p^2}{2m} = 7{,}85 \cdot 10^{-19}$ Дж.

10. По закону электромагнитной индукции Фарадея,

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} + \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = -S_1\frac{\Delta B}{\Delta t} + S_2\frac{\Delta B}{\Delta t} = (S_2 - S_1)\frac{\Delta B}{\Delta t} .$$

По закону Ома, $I = \frac{\mathcal{E}_i}{R}$. Искомый заряд равен

$$q = I\Delta t = \frac{S_2 - S_1}{R}\Delta B .$$

Так как $\Delta B = 0 - B = -B$, то

$$q = \frac{S_1 - S_2}{R}B = \frac{(2a)^2 - a^2}{R}B = \frac{3a^2}{R}B .$$

Вариант 3

1. $\frac{t_1}{t_2} = 1$.

2. Из условия равновесия стержня находим $T = 4mg$.

3. $h_{\max} = \frac{2v_0^2}{g} = 8000$ м.

4. Пусть скорости грузов в момент прохождения положения равновесия равны v_1 и v_2. Тогда, пренебрегая трением, в соответствии с законом сохранения механической энергии запишем

$$\frac{2mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}=2mg\cdot 2L-mgL\,.$$

Поскольку угловая скорость ω вращения грузов одна и та же, то

$$v_1=\omega\cdot 2L\,,\ \ v_2=\omega L\,,\ \ v_1=2v_2\,.$$

Отсюда найдем искомые скорости:

$$v_1=2\sqrt{\frac{2gL}{3}}\,,\ \ v_2=\sqrt{\frac{2gL}{3}}\,.$$

5. После установления равновесия в системе температура обеих частей сосуда станет одной и той же и равной T, а гелий равномерно распределится по всему сосуду. Температура в сосуде определяется из закона сохранения энергии:

$$U=\frac{3}{2}\nu_1RT_1+\frac{3}{2}\nu_2RT_2=\frac{3}{2}\left(\nu_1+\nu_2\right)RT\,,$$

откуда

$$T=\frac{\nu_1T_1+\nu_2T_2}{\nu_1+\nu_2}=400\ \text{К}\,.$$

6. Работа сил электрического поля, необходимая для перестройки системы, равна убыли потенциальной энергии взаимодействующих зарядов:

$$A=W_1-W_2\,.$$

Начальная энергия системы была

$$W_1=k\frac{q\cdot q}{a}+k\frac{q\cdot 2q}{a}+k\frac{2q\cdot q}{a}=5k\frac{q^2}{a}\,.$$

Конечная энергия системы стала

$$W_2=k\frac{q\cdot q}{a}+k\frac{q\cdot 2q}{2a}+$$

$$+k\frac{2q\cdot q}{a}=4k\frac{q^2}{a}\,.$$

Таким образом,

$$A=W_1-W_2=k\frac{q^2}{a}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0a}\,.$$

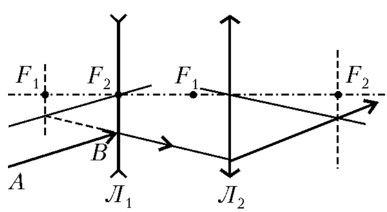


Рис. 7

7. См. рис.7.

8. $q_{\max} = 4\pi\varepsilon_0 r \dfrac{h\dfrac{c}{\lambda} - A}{e} = 1{,}45 \cdot 10^{-11}$ Кл (здесь c – скорость света, e – элементарный электрический заряд).

9. На двух резисторах выделяется количество теплоты

$$Q = A - \Delta W .$$

Работа источника тока равна

$$A = \Delta q \mathcal{E} = 2CU\mathcal{E} .$$

Приращение энергии батареи конденсаторов равно

$$\Delta W = \frac{2CU^2}{2} = CU^2 .$$

Поскольку резисторы соединены параллельно, то

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1}\Delta t , \quad Q_2 = \frac{U^2}{R_2}\Delta t , \text{ и } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} .$$

Окончательно находим

$$Q_1 = Q - Q_2 = Q\frac{R_2}{R_1 + R_2} = CU\left(2\mathcal{E} - U\right)\frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

10. Так как сопротивление контура $R = 0$, суммарная ЭДС в контуре должна быть равна нулю. Значит, суммарный магнитный поток через контур не должен изменяться. Если перемычка сдвинулась на величину x и в ней появился ток I, то изменение суммарного магнитного потока равно

$$\Delta\Phi = Bhx + LI = 0 .$$

Отсюда находим

$$I = -\frac{Bh}{L}x .$$

По закону Ампера сила, действующая на перемычку с током, равна

$$F_x = IBh = -\frac{B^2h^2}{L}x .$$

Ускорение перемычки равно

$$a_x = \frac{F_x}{m} = -\frac{B^2h^2}{mL}x ,$$

откуда следует, что перемычка совершает колебательное движение с круговой частотой

$$\omega = \frac{Bh}{\sqrt{mL}} .$$

Для колебательного движения

$$v_{\max} = x_{\max}\omega .$$

В нашем случае $v_{\max} = v_0$ и $x_{\max} = s$, поэтому

$$v_0 = s\omega = \frac{sBh}{\sqrt{Lm}} .$$

Отсюда найдем массу перемычки:

$$m = \frac{s^2B^2h^2}{Lv_0^2} .$$

Скорость перемычки описывается уравнением

$$v = v_0 \cos \omega t .$$

В момент времени $t = \tau$ скорость $v = \frac{v_0}{2}$. Следовательно,

$$\tau = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi s}{3v_0} .$$

Вариант 4

1. По часовой стрелке, если смотреть со стороны магнита.

2. Меньшую силу нужно приложить, чтобы сдвинуть семь верхних книг.

3. $F = \left(p_0 + \rho h(g-a)\right)S = \frac{3}{4}\pi d^2\left(p_0 + 0{,}75\rho g h\right).$

4. Брусок остается неподвижным до тех пор, пока сила упругости, действующая на него со стороны нити, не достигнет максимального значения силы трения покоя:

$$T = F_{\text{тр}} = \mu M g .$$

Величина силы упругости нити T зависит от амплитуды колебаний груза. Амплитуда A равна начальному отклонению груза от положения равновесия, которое определяется равенством

$$mg = kx_0 = kA \text{, откуда } A = \frac{mg}{k} .$$

Максимальное растяжение пружины равно

$$x_{\max} = 2A = \frac{2mg}{k} .$$

Соответственно,

$$T = kx_{\max} = 2mg .$$

Таким образом,

$$\mu = \frac{T}{Mg} = 0,5 .$$

5. $Q_{23} = \nu R T_1 \approx 2,5$ кДж .

6. $\varphi = \dfrac{q\sqrt{5}}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

7. См. рис.8.

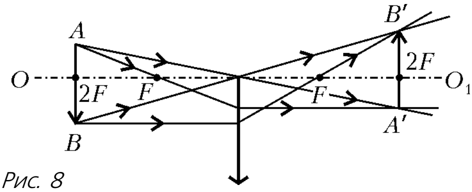


Рис. 8

8. $\varphi_{\max} = \dfrac{h\dfrac{c}{\lambda} - A}{e} = 6,07$ В (здесь c – скорость света, e – элементарный электрический заряд).

9. До размыкания ключа установившаяся сила тока равна $I = \dfrac{\mathscr{E}}{R_3}$ (через резисторы с сопротивлениями R_1 и R_2 ток не течет). После размыкания ключа электрическая энергия катушки выделится в виде тепла на резисторах с сопротивлениями R_1 и R_2 (через резистор сопротивлением R_3 ток течь не будет):

$$Q = \frac{LI^2}{2} = \frac{L\mathscr{E}^2}{2R_3^2} = Q_1 + Q_2 .$$

Так как эти резисторы соединены параллельно, разности потенциалов на них одинаковы, поэтому

$$Q_1 = \frac{U^2}{R_1}\Delta t , \quad Q_2 = \frac{U^2}{R_2}\Delta t , \text{ и } \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_2}{R_1} .$$

Окончательно находим

$$Q_2 = Q - Q_1 = \frac{Q}{1 + (R_2/R_1)} = \frac{3L\mathscr{E}^2}{R^2} .$$

10. Пусть за время удара Δt шарика о клин между ними действовала сила, среднее значение которой равно F, причем из-за отсутствия трения сила $\vec{F}$ направлена перпендикулярно поверхности клина (рис.9,*а*). Тогда можно записать (рис.9,*б*)

$$\vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 .$$

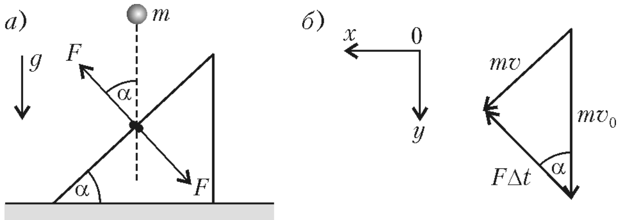


Рис. 9

В проекциях на координатные оси уравнения второго закона Ньютона для обоих тел будут иметь вид

$$mv_y - mv_0 = -F\Delta t\cos\alpha,$$

$$mv_x = F\Delta t\sin\alpha,$$

$$Mu = F\Delta t\sin\alpha,$$

где u – скорость клина, с которой он стал двигаться вдоль оси x. Отсюда найдем

$$v_x = \frac{M}{m}u, \quad v_y = v_0 - \frac{M}{m}u\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 + \left(\frac{M}{m}\right)^2\frac{u^2}{\sin^2\alpha} - 2\frac{M}{m}uv_0\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Закон сохранения энергии дает

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}, \text{ или } v^2 = v_0^2 - \frac{M}{m}u^2.$$

Из двух выражений для v^2 получим

$$u = \frac{v_0\sin 2\alpha}{\frac{M}{m} + \sin^2\alpha} = \frac{2\sqrt{3}v_0 m}{4M + m}.$$

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

МАТЕМАТИКА

Дополнительное вступительное испытание

Вариант 1

1. $x = 2$, $y = 3$.

Для каждого решения системы выполняются условия $x > 0$, $x \neq 1$. Кроме того, имеем

$$x^y = 2^{y\log_2 x} = 2^{x+1}.$$

Поэтому первое уравнение системы может быть переписано в виде

$$3 \cdot 2^{x+1} = 4^x + 8 .$$

Обозначив $t = 2^x$, уравнение можно переписать так: $t^2 - 6t + 8 = 0$. Корнями этого квадратного уравнения являются два числа $t_1 = 2$, $t_2 = 4$. Уравнения $2^x = 2$ и $2^x = 4$ имеют корнями числа $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Первый корень не удовлетворяет определенным выше условиям. Значит, $x = 2$ и $y = \dfrac{2+1}{\log_2 2} = 3$. Проверкой убеждаемся, что найденная пара чисел действительно есть решение данной системы уравнений.

2. $\dfrac{2}{3} \le x < \dfrac{4}{5}$.

Все решения удовлетворяют неравенствам

$$\frac{1-x}{x} > 0, \qquad \frac{3x-2}{3x+4} \ge 0 .$$

Множество решений первого из них имеет вид $0 < x < 1$. Второму же удовлетворяют числа $x < -\dfrac{4}{3}$ и $x \ge \dfrac{2}{3}$. Значит, множество решений исходного неравенства содержится в промежутке $\dfrac{2}{3} \le x < 1$. На этом промежутке данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 > \frac{3x-2}{3x+4}$$

и неравенству

$$(1-x)^2 (3x+4) > x^2 (3x-2) .$$

После упрощений это неравенство принимает вид $4 - 5x > 0$. Из его решений в промежуток $\dfrac{2}{3} \le x < 1$ попадают лишь точки, удовлетворяющие неравенствам $\dfrac{2}{3} \le x < \dfrac{4}{5}$.

3. $\dfrac{12}{7}$.

Пусть x – значение аргумента, при котором данная функция принимает положительное значение. Тогда

$$0 < 3\cos^2 x + 2\sin x - 1 = -3\sin^2 x + 2\sin x + 2 =$$

$$= -3\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} \le \frac{7}{3} ,$$

и

$$\frac{4}{3\cos^2 x + 2\sin x - 1} \geq \frac{4}{7/3} = \frac{12}{7}.$$

Значение $12/7$ принимается при $\sin x = 1/3$.

4. $\dfrac{25}{4}$.

Обозначим величину угла $\angle BAC$ буквой α. Сумма углов треугольника равна π, поэтому $\angle DCB = \pi - \frac{\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Высоты треугольников ADC и BDC, проведенные из вершины C, совпадают. Поэтому имеем равенство

$$AC \sin\alpha = BC \sin\frac{\pi}{12}. \qquad (1)$$

Медиана CD делит площадь треугольника ABC пополам, поэтому высоты треугольников ADC и BDC, проведенные на их общее основание CD, равны. Приравнивая их длины, получаем равенство

$$BC \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = AC \sin\frac{5\pi}{12}. \qquad (2)$$

Перемножая почленно равенства (1) и (2), сокращая затем получившееся равенство на $AC \cdot BC$, находим

$$\sin\alpha\cos\alpha = \sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{12},$$

или $\sin 2\alpha = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. По условию выполняется неравенство $AC > AD$, значит, $\angle ADC > \angle ACD$ или $\frac{7\pi}{12} - \alpha > \frac{5\pi}{12}$. Итак, $\alpha < \frac{\pi}{6}$, так что $2\alpha = \frac{\pi}{6}$ и $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

Итак, углы треугольника ABC, прилежащие к стороне AB, равны по $\frac{\pi}{12}$. Значит, этот треугольник равнобедренный, т.е. $AC = BC = 5$ и $\angle ACB = \frac{5\pi}{6}$. Искомая площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{25}{4}.$$

Заметим, что равенство (1) можно получить также с помощью теоремы синусов, примененной к треугольнику ABC, а (2) следует из равенства площадей треугольников ADC и DBC.

5. 80 м.

Обозначим буквой S расстояние в метрах от леса до тернового куста и буквой v первоначальную скорость зайца в метрах в минуту. Скорость, с которой волк догонял зайца, также равна v метров в минуту. Возможны два случая.

а) Предположим, что расстояние от леса до тернового куста превосходит или равно 100 м. Тогда волк выбежал из леса уже после того, как заяц наступил на колючку. Значит, заяц бежал последние 50 м со скоростью $\frac{2}{3}v$ м/мин и потратил на это $50\Big/\left(\frac{2}{3}v\right) = 75/v$ мин. За это время волк пробежал $v \cdot \frac{75}{v} = 75$ м. Учитывая же, что ему осталось добежать до куста 10 м, заключаем, что расстояние от леса до куста равно 85 м, вопреки нашему предположению. Этот случай невозможен.

б) Итак, расстояние от леса до куста меньше 100 м. Это значит, что на виду у волка заяц пробежал $50 - S/2$ м со скоростью v м/мин, а оставшиеся $S/2$ м со скоростью $2v/3$ м/мин, затратив на последние 50 м

$$\frac{50 - S/2}{v} + \frac{S/2}{2v/3}$$

минут. За это время, двигаясь со скоростью v м/мин, волк пробежал $(50 - S/2) + 3S/4$ м, что согласно условию равно $S - 10$ м. Решая уравнение $50 - S/2 + 3S/4 = S - 10$, находим $S = 80$ м.

6. Пусть E — точка касания сферы с прямой DB_1. Плоскость AB_1C_1D пересекает сферу по окружности, прямые DB_1 и DC_1 касаются этой окружности. Так как длины касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны, имеем $DE = DC_1 = \sqrt{2}$. Проведем в плоскости AB_1C_1D через точку E прямую перпендикулярно DB_1 и точку ее пересечения с прямой B_1C_1 обозначим буквой F. Так как F — точка пересечения перпендикуляров к касательным, проведенных в точках касания, то F — центр указанной выше окружности, а центр сферы O лежит на перпендикуляре к плоскости AB_1C_1D, проходящем через точку F.

Прямоугольные треугольники EB_1F и DB_1C_1 имеют общий острый угол и потому подобны. Значит, $\frac{EF}{EB_1} = \frac{DC_1}{B_1C_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Учитывая, что $EB_1 = DB_1 - DE = \sqrt{18} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, находим $FC_1 = EF = 1$.

Проведем через точку F плоскость, перпендикулярную ребру B_1C_1. Точки ее пересечения с ребрами A_1D_1, AD, BC обозначим буквами P, Q, R соответственно. Проведем в плоскости $PFRQ$ через точку F перпендикуляр к прямой QF и точки пересечения этого перпендикуляра с прямыми QP и QR обозначим буквами L и M соответственно. Докажем, что прямая LM перпендикулярна плоскости AB_1C_1D и потому центр сферы O лежит на ней. Прямая B_1C_1 перпендикулярна плоскости $PFRQ$, а потому она перпендикулярна и прямой LM. По построению имеем также $LM \perp QF$. Итак, прямая LM перпендикулярна двум прямым B_1C_1 и QF, лежащим в плоскости AB_1C_1D, а потому она перпендикулярна этой плоскости. Значит, центр сферы лежит на прямой LM.

Обозначим буквой K проекцию точки O на плоскость $A_1B_1C_1D_1$. Так как наклонные OC_1 и OD_1 − радиусы сферы, т.е. имеют равную длину, то их проекции, т.е. отрезки KC_1 и KD_1, также имеют равную длину. Но это значит, что точка K лежит в плоскости $A_1B_1C_1D_1$ на перпендикуляре к отрезку C_1D_1, проходящем через его середину N. Прямые OF и B_1C_1 перпендикулярны, это доказано ранее. По теореме о трех перпендикулярах можно утверждать, что и KF − проекция OF на плоскость $A_1B_1C_1D_1$, перпендикулярна прямой B_1C_1. Учитывая, что прямая PF также перпендикулярна B_1C_1, заключаем, что точка K лежит на прямой PF. Итак, K есть точка пересечения прямой PF и перпендикуляра к C_1D_1, проходящего через точку N.

Для дальнейшего удобно вынести плоскость $PFRQ$ и все построенные в ней точки и прямые на отдельный чертеж. По доказанному выше центр сферы O лежит на пересечении прямой LM и перпендикуляра к PF, проведенного через точку K, причем K есть середина отрезка PF. Учитывая, что $PFRQ$ − квадрат, заключаем, что $OK = KF = \frac{1}{2}$. По теореме Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику OKC_1, находим

$$OC_1^2 = OK^2 + KC_1^2 = OK^2 + KF^2 + FC_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{6}{4}$$

и

$$OC_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Вариант 2

1. $n = 33$.

Делим 405 на 18 с остатком; $405 = 18 \cdot 22 + 9$. Поэтому $a_{23} = -405 + 18 \cdot 22 = -9$, $a_{24} = 9$. Так как $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_{23}| =$

$= \dfrac{405+9}{2} \cdot 23 = 207 \cdot 23 = 4761$, то $a_{24} + a_{25} + \ldots + a_n = 5661 - 4761 = 900$. Пусть в последней сумме k слагаемых. Тогда $a_n = 9 + 18(k-1) = 18k - 9$ и получаем уравнение $\dfrac{9 + (18k-9)}{2} \cdot k = 900$, $9k^2 = 900$, $k^2 = 100$. Отсюда $k = 10$ и $n = 23 + k = 33$.

2. $(2; 3) \cup \left(\dfrac{7}{2}; 4\right) \cup (4; 5)$.

Так как $-x^2 + 7x - 10 = (x-2)(5-x)$, то ОДЗ: $2 < x < 5$, $x \neq 3$, $x \neq 4$ и $\log_{5-x}(x-2) \neq 1$. На ОДЗ:

$$\frac{1 + 1 + \log_{x-2}(5-x)}{2 - 2\log_{5-x}(x-2)} \leq 2.$$

Пусть $\log_{x-2}(5-x) = y$, тогда $\log_{5-x}(x-2) = \dfrac{1}{y}$ и $y \neq 1$ (по ОДЗ), $\dfrac{2+y}{2 - \dfrac{2}{y}} \leq 2$, $\dfrac{y(2+y)}{y-1} - 4 \leq 0$, $\dfrac{y^2 - 2y + 4}{y-1} \leq 0$. Но $y^2 - 2y + 4 > 0$ всегда, так как $D = -12 < 0$. Получаем $y < 1$, $\log_{x-2}(5-x) < 1$. На ОДЗ:

$$\begin{cases} x - 2 < 1, \\ 5 - x > x - 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 2 > 1, \\ 5 - x < x - 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} x < 3, \\ x < \dfrac{7}{2} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 3, \\ x > \dfrac{7}{2} \end{cases}$$

и $x < 3$ или $x > \dfrac{7}{2}$. Учитывая ОДЗ, получаем ответ.

3. $\begin{cases} x = \dfrac{2\pi + 2}{15}, \\ y = \pm \arcsin\sqrt{\dfrac{\pi - 2}{3}} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2\pi - 4}{15}, \\ y = \pm \arcsin\sqrt{\dfrac{4 - \pi}{3}} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Правая часть равна 2. Так как $\left|a+\frac{1}{a}\right|\geq 2$ и $\operatorname{tg}^2\alpha\geq 0$, то получаем систему

$$\begin{cases}\operatorname{tg}^2\left(5x+\sin^2 y\right)=0,\\ \left|\dfrac{5x+\cos 2y}{3}+\dfrac{3}{5x+\cos 2y}\right|=2.\end{cases}$$

Так как $\left|a+\frac{1}{a}\right|=2$ только при $a=\pm 1$, то

$$\begin{cases}5x+\sin^2 y=\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\\ 5x+\cos 2y=\pm 3.\end{cases}$$

Отсюда $\sin^2 y-\cos 2y=\pi n\mp 3$; $\sin^2 y-\left(1-2\sin^2 y\right)=\pi n\mp 3$; $3\sin^2 y=\pi n+1\mp 3$.

1) $\sin^2 y=\dfrac{\pi n-2}{3}$. Так как $0\leq\sin^2 y\leq 1$, то n = 1. Тогда $\sin^2 y=\dfrac{\pi-2}{3}$ и $x=\dfrac{1}{5}\left(\pi-\sin^2 y\right)=\dfrac{2\pi+2}{15}$. Получаем

$$\begin{cases}\sin y=\pm\sqrt{\dfrac{\pi-2}{3}},\\ x=\dfrac{2\pi+2}{15}.\end{cases}$$

2) $\sin^2 y=\dfrac{\pi n+4}{3}$. Тогда $n=-1$, $\sin^2 y=\dfrac{4-\pi}{3}$ и $x=$ $=\dfrac{1}{5}\left(-\pi-\sin^2 y\right)=\dfrac{-2\pi-4}{15}$. Получаем

$$\begin{cases}\sin y=\pm\sqrt{\dfrac{4-\pi}{3}},\\ x=\dfrac{-2\pi-4}{15}.\end{cases}$$

4. $\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$.

Пусть AB = a, AD = b, $\angle BAC=\angle DAC=\alpha$, площадь $S_{ABC}=6\sqrt{2}$. Тогда $S_{ABC}=\dfrac{a\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2}$, $S_{ACD}=\dfrac{b\cdot AC\cdot\sin\alpha}{2}$ и $\dfrac{S_{ACD}}{S_{ABC}}=\dfrac{b}{a}=\dfrac{12\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}=2$. Отсюда $b=2a$. Так как $\angle BAC=\angle DAC$ и четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, то $\cup BC = \cup CD$ и $BC = CD$.

Тогда по теореме косинусов:

$$a^2 + AC^2 - 2aAC\cos\alpha = 4a^2 + AC^2 - 4aAC\cos\alpha .$$

Отсюда

$$a = \frac{2}{3}AC\cos\alpha .$$

Тогда

$$S_{ABC} = \frac{1}{3}AC^2\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{6}AC^2\sin 2\alpha .$$

Получаем

$$\frac{1}{6}\cdot 81\sin 2\alpha = 6\sqrt{2},\ \ \sin 2\alpha = \frac{36\sqrt{2}}{81} = \frac{4\sqrt{2}}{9},\ \ \cos 2\alpha = \sqrt{1-\frac{32}{81}} = \frac{7}{9}$$

(больше 0, так как $\angle BAD$ острый по условию).

Далее

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \ \text{ и } \ a = \frac{2}{3}AC\cos\alpha = \frac{2}{3}\cdot 9\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2} .$$

По теореме косинусов:

$$BD^2 = a^2 + 4a^2 - 4a^2\cos 2\alpha = a^2\left(5 - 4\cos 2\alpha\right) = 32\cdot\frac{17}{9} .$$

Отсюда $BD = \dfrac{4\sqrt{34}}{3}$ и радиус описанной окружности

$$R = \frac{BD}{2\sin 2\alpha} = \frac{4\sqrt{34}\cdot 9}{24\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{17}}{2} .$$

5. $a \in \left[\dfrac{4}{5}; \dfrac{72-16\sqrt{14}}{5}\right]$.

Положим $t = 5^{-\sqrt{y}} \in (0; 1]$. Неравенство принимает вид: $64t^2 + (8-40a)t - 5a \le 0$. Корни $t_1 = -\dfrac{1}{8}$, $t_2 = \dfrac{5a}{8}$. Следовательно, чтобы y существовал, необходимо и достаточно $a > 0$ и $0 < t \le \min\left(1; \dfrac{5a}{8}\right)$. Положим $2^x = z \in (0; +\infty)$. Тогда чтобы система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $40t = 80z + 5a + \dfrac{a}{z}$ хотя бы при одном $t \in \left(0; \min\left(1; \dfrac{5a}{8}\right)\right]$ имело корень $z > 0$. Получаем квадратное уравнение $80z^2 + (5a - 40t)z + a = 0$. Так как в точке $z = 0$ левая часть равна

a и $a > 0$, то для существования корня $z > 0$ необходимо и достаточно: $z_{\text{верш}} > 0$ и существуют корни. Имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{40t-5a}{160} > 0, \\ (5a-40t)^2 - 320a \geq 0, \\ 0 < t \leq \min\left(1; \dfrac{5a}{8}\right); \end{cases} \qquad \begin{cases} t > \dfrac{a}{8}, \\ 40t - 5a \geq \sqrt{320a}, \\ t \leq \min\left(1; \dfrac{5a}{8}\right). \end{cases}$$

$$40t - 5a \geq \sqrt{320a} \Leftrightarrow t \geq \frac{a}{8} + \sqrt{\frac{a}{5}} \ \left(> \frac{a}{8}, \text{ так как } a > 0\right).$$

Система принимает вид

$$\begin{cases} t \geq \dfrac{a}{8} + \sqrt{\dfrac{a}{5}}, \\ t \leq 1, \\ t \leq \dfrac{5a}{8}. \end{cases}$$

Чтобы эта система имела решение, необходимо и достаточно

$$\begin{cases} \dfrac{a}{8} + \sqrt{\dfrac{a}{5}} \leq 1, \\ \dfrac{a}{8} + \sqrt{\dfrac{a}{5}} \leq \dfrac{5a}{8}. \end{cases}$$

Пусть $\sqrt{\dfrac{a}{5}} = q \geq 0$. Тогда $\dfrac{a}{8} = \dfrac{5q^2}{8}$. Первое неравенство примет вид $\dfrac{5q^2}{8} + q - 1 \leq 0$, $5q^2 + 8q - 8 \leq 0$, $q_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{14}}{5}$. Тогда $\sqrt{\dfrac{a}{5}} \leq \dfrac{2\sqrt{14}-4}{5}$, $\dfrac{a}{5} \leq \dfrac{72-16\sqrt{14}}{25}$, $0 < a \leq \dfrac{72-16\sqrt{14}}{5}$. Второе неравенство дает: $\sqrt{\dfrac{a}{5}} \leq \dfrac{a}{2} \Leftrightarrow \dfrac{4}{5} \leq a$.

6. 1 : 2, считая от вершины S.

Пусть H – точка пересечения диагоналей AC и BD в прямоугольнике $ABCD$. Пусть данная в условии плоскость T пересекает SB в точке P, SD в точке Q, SC в точке L, SH в точке M. Так как $BD \parallel T$, то $PQ \parallel BD$ и $M \in PQ$, $M \in AL$. Пусть искомое отношение $\dfrac{SL}{LC} = y$. Пусть $LK \parallel MH$ и $K \in AC$. Тогда из подобия: $\dfrac{HK}{KC} = y$, $\dfrac{AH}{HK} = \dfrac{y+1}{y}$, $\dfrac{LK}{SH} = \dfrac{1}{y+1}$, $\dfrac{MH}{LK} =$

$= \dfrac{AH}{AK} = \dfrac{y+1}{2y+1}$, $\qquad \dfrac{MH}{SH} = \dfrac{MH}{LK} \cdot \dfrac{LK}{SH} = \dfrac{y+1}{2y+1} \cdot \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{2y+1}$,

$\dfrac{PQ}{BD} = \dfrac{SM}{SH} = \dfrac{2y}{2y+1}$. Тогда $\dfrac{V_{ASPQ}}{V_{ASBD}} = \dfrac{S_{SPQ}}{S_{SBD}} = \left(\dfrac{PQ}{BD}\right)^2 = \left(\dfrac{2y}{2y+1}\right)^2$.
Высота пирамиды $SAPQ$, опущенная из точки S, равна радиусу R данного в задаче шара. Поэтому $\dfrac{V_{ASPQ}}{V_{ASBD}} = \dfrac{S_{APQ} \cdot R}{S_{ABD} \cdot SH}$. Получаем $\dfrac{S_{APQ} \cdot R}{S_{ABD} \cdot SH} = \left(\dfrac{2y}{2y+1}\right)^2$. Проведем через A плоскость, перпендикулярную BD. Пусть она пересекает BD в точке V, а PQ в точке U. Тогда $AV \perp BD$, $AU \perp PQ$, $UV \perp BD$, $UV \parallel SH$, $UV = MH$. Имеем $2S_{ABD} = AB \cdot AD = AV \cdot BD$. Пусть $AB = a$, $AD = b$, тогда $BD = \sqrt{a^2+b^2}$ и $AV = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Пусть $SH = h$. Тогда

$$UV = MH = \frac{h}{2y+1},$$

$$AU = \sqrt{AV^2 + UV^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + \left(\frac{h}{2y+1}\right)^2}.$$

Имеем

$$\frac{S_{APQ}}{S_{ABD}} = \frac{PQ \cdot AU}{BD \cdot AV} = \frac{2y}{2y+1}\sqrt{1 + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \cdot \left(\frac{h}{2y+1}\right)^2}.$$

Получаем уравнение

$$\frac{2y}{2y+1}\sqrt{1 + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \cdot \left(\frac{h}{2y+1}\right)^2} \cdot \frac{R}{h} = \left(\frac{2y}{2y+1}\right)^2.$$

Сокращая на $\dfrac{2y}{2y+1}$, затем домножая на $2y + 1$ и возводя в квадрат, приходим к уравнению

$$y^2\left(\frac{4h^2}{R^2} - 4\right) - 4y - \left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \cdot h^2 + 1\right) = 0.$$

Подставляя $a = 2$, $b = 3$, $h = \dfrac{12}{\sqrt{23}}$, $R = 1$, получаем $484y^2 - 92y - 75 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $\dfrac{1}{2}$.

Вариант 3

1. 5.

Положим $2^x = y > 0$. Получим $-y^2 + 32y - 150 = 150$ или $-y^2 + 32y - 150 = -150$, т.е. $-y^2 - 32y + 300 = 0$ или $-y^2 - 32y = 0$. В первом уравнении дискриминант $D < 0$, из второго $y = 0$ (не подходит) либо $y = 32$ и $x = 5$.

2. $\begin{cases} x = -6, \\ y = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = \dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2}, \\ y = \dfrac{-7+3\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$

Из первого уравнения вытекают случаи:

1) $y = -1$. Тогда второе уравнение примет вид $\sqrt{x^2+6x+9} = x+9$. Оно равносильно системе

$$\begin{cases} x+9 \geq 0, \\ x^2+6x+9 = (x+9)^2. \end{cases}$$

Второе уравнение дает $12x + 72 = 0$ и $x = -6$. Это решение удовлетворяет и первому неравенству.

2) $y = x$. Тогда второе уравнение примет вид $\sqrt{x^2+7x+10} = -x^2-7x+2$. Положим $\sqrt{x^2+7x+10} = t \geq 0$. Тогда $-x^2-7x+2 = -t^2+12$. Получаем $t = -t^2+12$, или $t^2+t-12=0$, его корни -4 и 3. Так как $t \geq 0$, то $t = 3$, т.е. $\sqrt{x^2+7x+10} = 3$. Отсюда $x^2 + 7x + 10 = 9$, $x^2 + 7x + 1 = 0$. Получаем 2 корня: $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}$. При этом $y = x$, и надо учесть ОДЗ: $y \geq -1$. Поэтому подходит только

$$y = x = \frac{-7+\sqrt{45}}{2} = \frac{-7+3\sqrt{5}}{2}.$$

3. а) $\operatorname{arctg} 4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $S = 120 \operatorname{arctg} 4 + 7140\pi$ и $S < 23040$.

а) ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\cos 2x \neq 0$, $\cos 4x \neq 0$, $\operatorname{tg} x + 7 \operatorname{tg} 4x \neq 0$. При умножении знаменателя второй дроби на $\operatorname{ctg} x$ получается выражение в скобке в числителе. Поэтому вторая дробь равна $32\,\mathrm{ctg}\,x$. Имеем

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\cos 2x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}=$$

$$=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}=\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{1-\mathrm{tg}\,x}$$

(последний переход получен делением числителя и знаменателя на $\cos x\neq 0$). Уравнение принимает вид: $\frac{9(\mathrm{tg}\,x+1)}{1-\mathrm{tg}\,x}+\frac{32}{\mathrm{tg}\,x}+$ $+7=0$. Заменяя $\mathrm{tg}\,x$ на y, получаем: $\frac{9(y+1)}{1-y}+\frac{32}{y}+7=0$. Освобождаясь от знаменателей, получим $2y^2-16y+32=0$ и $y^2-8y+16=0$. (Если изначально все переводится в sin и cos, то получится $\sin^2 x-8\sin x\cos x+16\cos^2 x=0$ и после деления на $\cos^2 x$ придем к тому же уравнению.) Отсюда $\mathrm{tg}\,x=y=4$. Из равенства $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x$ получаем, что $\cos^2 x=\frac{1}{17}$. Применяя дважды формулу $\cos 2x=2\cos^2 x-1$, вычисляем $\cos 2x$ и $\cos 4x$; также, применяя дважды формулу $\mathrm{tg}\,2x=\frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x}$, вычисляем $\mathrm{tg}\,2x$ и $\mathrm{tg}\,4x$. Все условия из ОДЗ выполняются, т.е. $x=\mathrm{arctg}\,4+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) $x=\mathrm{arctg}\,4+\pi n\in[0;120\pi]$ при $n=0, 1, \ldots, 119$. Используя формулу для суммы членов арифметической прогрессии, получаем, что сумма всех корней данного уравнения, принадлежащих отрезку $[0;120\pi]$, равна

$$S=120\,\mathrm{arctg}\,4+\pi\frac{(0+119)\cdot 120}{2}=120\,\mathrm{arctg}\,4+7140\pi.$$

Так как

$$\mathrm{arctg}\,4\leq\frac{\pi}{2},\ \text{то}\ S\leq 60\pi+7140\pi=7200\pi<7200\cdot 3{,}2=23040.$$

4. Тангенсы углов: $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $-2\sqrt{6}$, $R=\frac{35}{\sqrt{6}}$.

Пусть заданное отношение площадей $m:n$ и $m<n$. Пусть $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}=m:n$ и $\frac{S_{BCD}}{S_{ABD}}=m:n$ (остальные случаи симметричны). Пусть диагонали пересекаются в точке K. Из отношения площадей треугольников ABC и ADC с общей стороной AC вытекает, что высоты, опущенные из B и D на AC, относятся как $m:n$. Прямоугольные треугольники, сторонами которых явля-

ются эти высоты и отрезки BK и DK, подобны (по 2 углам). Поэтому также $BK : KD = m : n$. Аналогично получаем $CK : AK = m : n$, т.е. $BK : KD = CK : AK$. Кроме того, углы BKC и AKD равны (как вертикальные). Следовательно, треугольники AKD и CKB подобны. При этом равны углы DAK и BCK, поэтому $AD \parallel BC$, т.е. $ABCD$ − трапеция. Из подобия треугольников AKD и CKB вытекает, что $BC : AD = m : n$ и $AD > BC$. Пусть $AD = nx$, $BC = mx$. Так как трапеция вписана в окружность, то она равнобокая (так как $\cup AB = \cup CD$). Поскольку она описана около окружности, то $AB + CD = AD + BC$. Отсюда $AB = CD = \dfrac{m+n}{2}x$, и AD − наибольшая сторона. Опустим перпендикуляр BH на AD. Тогда $AH = \dfrac{AD - BC}{2} = \dfrac{n-m}{2}x$. Значит, $BH^2 = AB^2 - AH^2 = mnx^2$, $BH = x\sqrt{mn}$. Тогда тангенсы двух углов четурехугольника равны $\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{2\sqrt{mn}}{n-m}$, а два равны $-\dfrac{2\sqrt{mn}}{n-m}$. Подставляя $m = 2$, $n = 3$, получаем первый ответ. Далее имеем: $HD = AD - AH = \dfrac{m+n}{2}x$ и $BD^2 = HD^2 + BH^2 = \dfrac{m^2+6mn+n^2}{4}x^2$. Так как $\sin BAD = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{2\sqrt{mn}}{m+n}$, то по теореме синусов из треугольника ABD для радиуса описанной окружности R получаем: $R = \dfrac{BD}{2\sin BAD} = \sqrt{\dfrac{m^2+6mn+n^2}{4}}\,\dfrac{m+n}{4\sqrt{mn}}x$. Учитывая, что $x = \dfrac{AD}{n}$, и подставляя значения $m = 2$, $n = 3$, $AD = 24$, получаем второй ответ.

5. $$\left[\arccos\frac{1}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[2; \frac{3\pi}{2}\right] \cup \left[-\arccos\frac{1}{4} + 2\pi n; \arccos\frac{1}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right],\ n, k \in \mathbb{Z},\ n \ge 1,\ k \ge 1.$$

ОДЗ: $x > 0$. Вынося все показатели степени из логарифмов, используя тождество $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$ и группируя все слагаемые с логарифмом, приходим к неравенству

$$\log_2 x\left(2\cos x + 8\sin^2 x - 8\right) \le 2\cos x - 4\cos 2x - 4.$$

Так как $8\sin^2 x = 4 - 4\cos 2x$, то окончательно получим неравенство $(\log_2 x-1)(2\cos x-4\cos 2x-4)\le 0$. Заменяя $\cos 2x = 2\cos^2 x-1$, получаем неравенство

$$(\log_2 x-1)\cos x\left(\cos x-\frac{1}{4}\right)\ge 0.$$

Оно сводится к объединению двух систем (учтем ОДЗ: $x>0$):

$$\begin{cases}0<x\le 2,\\ 0\le \cos x\le \dfrac{1}{4},\end{cases}\qquad \begin{cases}x\ge 2,\\ \cos x\le 0 \text{ или } \cos x\ge \dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Ответ получаем на тригонометрическом круге.

6. $\left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}\right)\cup(-1; +\infty)$.

Условие задачи равносильно тому, что хотя бы одно из чисел первой пары меньше обоих чисел из второй пары. Получаем объединение двух систем:

$$\begin{cases}(x+1)^3<x^3+3x^2+2x+2,\\ (x+1)^3<x^2+5x+4\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x^2-3x-2<x^3+3x^2+2x+2,\\ x^2-3x-2<x^2+5x+4.\end{cases}$$

Преобразуя, получаем:

$$\begin{cases}x<1,\\ x^3+2x^2-2x-3<0\end{cases} \text{ или } \begin{cases}x^3+2x^2+5x+4>0,\\ 8x>-6.\end{cases}$$

Кубические многочлены раскладываются на множители с учетом того, что есть корень $x=-1$. Приходим к системам:

$$\begin{cases}x<1,\\ (x+1)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)<0\end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases}(x+1)\left(x^2+x+4\right)>0,\\ x>-\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Решая эти системы методом интервалов, получаем ответ.

Замечание. Неравенства, получающееся из сравнения чисел в паре, не решаются.

Вариант 4

1. −6.

Имеем

$$a^3 = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}\right)^3 = 2 + 3\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{16} + 4 =$$

$$= 6 + 3\sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{32} = 6 + 6\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{4}$$

и $6a - a^3 = -6$.

2. 5 ч.

Петров на весь путь потратил 4 часа. Значит, полпути он пробегал за 2 часа. Первую половину пути Иванов бежал вдвое быстрее Петрова, а потому потратил на нее 1 час. Вторую половину пути Иванов бежал вдвое медленнее Петрова, и, значит, потратил на нее 4 часа. Время, затраченное Ивановым на весь пробег, равно 1 + 4 = 5 часов.

Можно, конечно, решать эту задачу, вводя неизвестные и составляя уравнения. Например, можно обозначить буквой v скорость Петрова и буквой S длину пути. Уравнение, связывающее эти величины, имеет вид $S = 4v$, а искомая величина есть

$$\frac{S/2}{2v} + \frac{S/2}{v/2} = \left(\frac{1}{4} + 1\right)\frac{S}{v} = 5.$$

3. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$. Имеем

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \frac{8}{9}.$$

Кроме того, по условию

$$0 > \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha.$$

Из этого неравенства, поскольку $\sin\alpha = \frac{1}{3} > 0$, следует, что $\cos\alpha < 0$. Значит, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Теперь находим

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{-2\sqrt{2}}{3}}{\frac{8}{9} - \frac{1}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

4. $1 < x \le 3$.

Пользуясь формулами $4^t = 2^{2t}$, $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ при $a = 9$, $c = 3$, $b = x^2 + 4x - 5$, находим

$$4^{\log_9\left(x^2+4x-5\right)} = 2^{2\log_9\left(x^2+4x-5\right)} = 2^{\log_3\left(x^2+4x-5\right)}.$$

Поэтому данное неравенство можно переписать в виде

$$2^{\log_3\left(x^2+4x-5\right)} \le 2^{\log_3\left(1+8x-x^2\right)}.$$

Функции 2^t и $\log_3 t$ монотонно возрастают на своих областях определения, поэтому последнее неравенство равносильно неравенству

$$\log_3\left(x^2+4x-5\right) \le \log_3\left(1+8x-x^2\right),$$

а также двойному неравенству

$$0 < x^2+4x-5 \le 1+8x-x^2$$

и, следовательно, системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-3 \le 0. \end{cases}$$

Множество решений первого неравенства состоит из двух областей $x<-5$ и $x>1$. Решения второго неравенства составляют промежуток $-1<x\le 3$. Множество же решений системы неравенств имеет вид

$$1<x\le 3.$$

5. $\frac{14}{5}$.

Треугольники AFD и BFK имеют по паре равных углов и потому подобны. Следовательно, $\frac{AF}{BF}=\frac{AD}{BK}$. Учитывая, что $BK = \frac{2}{3}BC = \frac{4}{9}AD$, заключаем: $\frac{AF}{BF}=\frac{9}{4}$ и

$$\frac{AB}{BF}=\frac{AF}{BF}-1=\frac{5}{4}, \quad BF=\frac{4}{5}AB.$$

Точно так же, пользуясь подобием треугольников AED и KEC, находим равенства

$$\frac{DE}{CE}=\frac{AD}{KC}=\frac{9}{2}, \quad \frac{CD}{CE}=\frac{DE}{CE}-1=\frac{7}{2}, \quad CE=\frac{2}{7}CD.$$

Теперь, поскольку $AB = CD$, имеем

$$\frac{BF}{CE}=\frac{\frac{4}{5}AB}{\frac{2}{7}CD}=\frac{14}{5}.$$

6. Наибольшее значение параметра равно $\sqrt[3]{3}$, а наименьшее равно -5.

Первое решение. При любом a функция $\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}$ определена на множестве чисел x, для которых выполнено $x \ge a$, $x^3+1 \ge 0$, т.е. на множестве чисел, одновременно удовлетворяющих неравенствам

$$x \ge a, x \ge -1. \tag{3}$$

При любом x из этого множества имеем

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1} \ge \sqrt{x^3+1},$$

и при $\sqrt{a^3+1} > 2$, т.е. при $a > \sqrt[3]{3}$, находим $\sqrt{x^3+1} \ge \sqrt{a^3+1} > 2$, так что данное уравнение при $a > \sqrt[3]{3}$ решений не имеет.

Для любого x, удовлетворяющего условиям (3), верно неравенство

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1} \ge \sqrt{x-a},$$

так что при $\sqrt{-1-a} > 2$, т.е. при $a < -5$, выполняется $\sqrt{x-a} \ge \sqrt{-1-a} > 2$. Значит, данное уравнение не имеет решений и при $a < -5$.

При $a = \sqrt[3]{3}$ данное уравнение имеет корень $\sqrt[3]{3}$, а при $a = -5$ оно имеет корень -1.

Второе решение. Это решение находит не только искомые наименьшее и наибольшее значения параметра a, но и все множество параметров, при которых разрешимо данное уравнение. Но оно использует непрерывность функции, стоящей в левой части уравнения.

Как доказано раньше, при любом a функция $\sqrt{x-a}+\sqrt{x^3+1}$ определена на множестве $x \ge b = \max(a; -1)$. Эта функция есть сумма двух возрастающих функций и потому возрастает. Она непрерывна и принимает сколь угодно большие значения. Поэтому уравнение будет разрешимо в том и только том случае, когда наименьшее значение функции, т.е. $f(b)$, не превосходит 2. Итак, условием разрешимости является выполнение неравенства $f(b) \le 2$. Рассмотрим отдельно два случая.

а) Пусть $a \ge -1$. Тогда $b = a$, $f(b) = \sqrt{a^3+1}$ и условие разрешимости принимает вид

$$\sqrt{a^3+1} \le 2.$$

Это неравенство на множестве $a \ge -1$ равносильно неравенству $a^3+1 \le 4$. Решая последнее неравенство, находим $a^3 \le 3$ и $a \le \sqrt[3]{3}$. Искомое множество значений параметра в первом случае имеет вид $-1 \le a \le \sqrt[3]{3}$.

б) Пусть $a < -1$. Тогда $b = -1$, $f(b) = \sqrt{-1-a}$ и условие разрешимости принимает вид

$$\sqrt{-1-a} \le 2.$$

Это неравенство на множестве $a < -1$ равносильно неравенству $-1-a \le 4$. Решая последнее неравенство, находим $a \ge -5$. Искомое множество значений параметра во втором случае имеет вид $-5 \le a \le -1$.

Объединяя найденные множества, находим множество значений параметра a, при которых данное уравнение имеет решение: $-5 \le a \le \sqrt[3]{3}$.

Вступительное испытание (вместо ЕГЭ)

Вариант 1

1. $\frac{1}{2552}$. **2.** $-4 \le x < -1$, $x \ge 1$. **3.** 25%. **4.** 2.

5. $\frac{2\pi}{3}$. *Указание.* Используйте теорему косинусов.

6. $-\log_3 2 \le x \le 1$.

7. 6. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм и $BC = 3$. Точки касания окружности со сторонами BC, AD и центр окружности лежат на одной прямой, перпендикулярной BC. Поэтому высота параллелограмма равна удвоенному радиусу, т.е. 2, а его площадь равна $2 \cdot 3 = 6$.

Иное решение основано на том, что суммы длин противоположных сторон описанного четырехугольника равны. Отсюда следует, что параллелограмм является ромбом, а его площадь равна учетверенной площади треугольника с основанием 3 и высотой 1.

8. $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Данное уравнение может быть переписано в виде $7\cos^3 x = 2\cos^2 x\left(2 - \cos^2 x\right)$, или $\cos^2 x\left(4 - 7\cos x - 2\cos^2 x\right) = 0$. Квадратное уравнение $2t^2 + 7t - 4 = 0$ имеет два корня $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = -4$. Уравнение $\cos x = -4$ решений не имеет, поэтому данное уравнение равносильно совокупности уравнений $\cos x = 0$ и $\cos x = \frac{1}{2}$.

9. $2\sqrt{6}$. Пусть O_1 – центр меньшей окружности и A – точка ее касания с заданной прямой. Точно так же, O_2 – центр большей окружности и B – точка ее касания с той же прямой. Согласно условию точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой AB.

Проведем через точку O_1 прямую параллельно AB и буквой C обозначим ее точку пересечения с продолжением радиуса O_2B за точку B. Четырехугольник O_1ABC − прямоугольник. Поэтому $CB = O_1A = 2$, $CO_2 = 2 + 3 = 5$ и по теореме Пифагора

$$AB = O_1C = \sqrt{O_1O_2^2 - CO_2^2} = \sqrt{49 - 25} = 2\sqrt{6}.$$

10. $2\frac{2}{3}$ часа. Обозначим буквами u и v выраженные в км/ч скорости, с которыми Василий ехал на автобусе и на велосипеде. Пусть также t − время в часах, затраченное им на дорогу от железнодорожной станции до деревни Бабушкино. Тогда скорость машины, на которой подвезли Василия до деревни, равна $\frac{3}{2}u$ км/ч, а расстояние от поселка до деревни равно $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}u$. Но то же расстояние он проехал на обратном пути за 1 час на велосипеде. Поэтому

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}u = v,$$

или $u = 4v$.

От станции до поселка Василий добирался $t - \frac{1}{6}$ часов со скоростью u км/ч. На обратном пути то же расстояние он проехал на такси со скоростью $6v$ км/ч за $t - 1$ часов. Имеем уравнение

$$u\left(t - \frac{1}{6}\right) = 6v(t - 1).$$

Из найденных равенств следует $4\left(t - \frac{1}{6}\right) = 6(t - 1)$, откуда находим $t = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$ ч.

11. 16. Обозначим буквами E, F, G середины ребер AD, BC, CS соответственно. Так как прямая EF параллельна DC, то прямая EF параллельна плоскости CDS и, значит, плоскость сечения пересекает плоскость CDS по прямой, параллельной EF и, следовательно, параллельной прямой DC. Через точку G в плоскости DCS можно провести единственную прямую, параллельную DC, − среднюю линию треугольника DCS. Обозначив буквой H середину ребра DS, заключаем, что четырехугольник $EFGH$ есть заданное условием задачи сечение пирамиды. Так как FG, GH, HE − средние линии в боковых гранях пирамиды, заключаем, что $FG = HE = \frac{7}{2}$, $GH = 3$. Кроме того, $EF = DC =$

$= 6$, поэтому искомый периметр сечения равен $2 \cdot \frac{7}{2} + 3 + 6 = 16$.

12. (1; 3), (3; 5). При $x = 1$ данное уравнение превращается в равенство $y^3 = 27$, из которого следует $y = 3$. Итак, пара $x = 1$, $y = 3$ удовлетворяет данному уравнению.

Далее считаем, что $x \geq 2$. Перенося x^3 в левую часть уравнения и раскладывая ее на множители, получаем $(y - x)\left(y^2 + xy + x^2\right) = 9x^2 + 17$, откуда следует

$$y - x = \frac{9x^2 + 17}{x^2 + xy + y^2}.$$

Из этого равенства следует $y - x > 0$, так что $y - x \geq 1$, ведь x, y − целые числа. Пользуясь неравенствами $y \geq x + 1$, $x \geq 2$, заключаем

$$1 \leq y - x \leq \frac{9x^2 + 17}{x^2 + x(x+1) + (x+1)^2} = \frac{9x^2 + 17}{3x^2 + 3x + 1} < 3.$$

Таким образом, возможны лишь два случая $y - x = 1$ и $y - x = 2$.

В первом случае получаем уравнение $(x + 1)^3 = x^3 + 9x^2 + 17$. Его можно переписать в виде $6x^2 - 3x + 16 = 0$. Это уравнение не имеет действительных решений.

Во втором случае имеем уравнение $(x + 1)^3 = x^3 + 9x^2 + 17$. После упрощения оно может быть переписано в виде $x^2 - 4x + 3 = 0$. Это уравнение имеет два целых корня $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Учитывая, что $x \geq 2$, оставляем только одно решение $x = 3$. Соответствующее значение второй переменной равно $x + 2 = 5$.

Вариант 2

1. $-1 < x < 2$, $x \geq 8$. **2.** 125 рублей. **3.** -4.

4. $2\sqrt{2}$.

Из прямоугольного треугольника ABC находим

$$AB = BC\cos\frac{\pi}{8},\ AC = BC\sin\frac{\pi}{8}.$$

Поэтому

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}BC^2 \cdot \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = 4\sin\frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}.$$

5. $3/2$.

Нужно привести все логарифмы к одному основанию, например 2, и вынести дробные степени из-под логарифмов. В результате данное выражение может быть переписано так:

$$\frac{\log_2\sqrt{2}}{\log_2\sqrt{3}}\cdot\frac{\log_2\sqrt{3}}{\log_2\sqrt[3]{2}}=\frac{1/2}{1/3}=\frac{3}{2}.$$

6. 7. Для решения задачи существенно, что точки P, Q и середина R отрезка AB лежат на одной прямой. Для доказательства этого заметим, что медианы PR и QR в равнобедренных треугольниках APB и AQB соответственно являются и высотами. Учитывая, что через точку R можно провести единственный перпендикуляр к прямой AB, заключаем, что прямые PR и QR совпадают. Затем используется теорема Пифагора:

$$PR=\sqrt{AP^2-AR^2}=\sqrt{225-144}=9,$$
$$QR=\sqrt{AQ^2-AR^2}=\sqrt{400-144}=16.$$

Точки P, Q могут лежать как по одну сторону от прямой AB, так и по разные. Если они лежат по разные стороны, то $PQ=9+16=$ $=25>AB$, но это противоречит условию задачи. Значит, они лежат по одну сторону и $PQ=16-9=7$.

7. $\frac{4}{5}$. Если t и s – время в минутах, затраченное велосипедистом на путь до встречи и после встречи соответственно, то аналогичные затраты времени для пешехода равны $t+20$ и $s+$ $+5$ минут. Постоянство скоростей означает, что $\frac{t}{s}=\frac{t+20}{s+5}$. Отсюда следует $t=4s$, и искомая величина равна $\frac{t}{t+s}=\frac{4}{5}$.

8. $2\sqrt{2}$. Длина хорды, на которую опирается вписанный угол α, равна $2R\sin\alpha$, где R – радиус окружности. Отрезок, заданный в условии, равен половине этой хорды, т.е. $R\sin\frac{\pi}{4}=2$. Отсюда следует $R=\frac{2}{\sqrt{2}/2}=2\sqrt{2}$.

9. $\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Все решения данного уравнения удовлетворяют условию $\cos 3x\neq 0$. В области, определяемой этим неравенством, данное уравнение равносильно уравнению $\cos x+\sin 2x=$ $=\cos 3x$. Учитывая тождество $\cos 3x-\cos x=-2\sin x\sin 2x$, перепишем получившееся уравнение в виде $\sin 2x\left(2\sin x+1\right)=0$. Это уравнение равносильно совокупности двух уравнений $\sin 2x=0$ и $\sin x=-\frac{1}{2}$. Множество решений первого уравнения имеет вид $x=\frac{\pi k}{2}$, где k пробегает все целые числа. Из них лишь при четных значениях $k = 2n$ получаются точки $x = \pi n$, удовлетворяющие условию $\cos 3x \neq 0$. Множество решений второго уравнения имеет вид $x = (-1)^{n-1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, где n пробегает целые числа. Все эти числа удовлетворяют равенству $\cos 3x = 0$ и потому не являются решениями данного уравнения. Итак, множество решений данного уравнения имеет вид πn, $n \in \mathbb{Z}$.

10. $(0;\ 0)$, $(3;\ 1)$, $\left(-\dfrac{1}{5}; -\dfrac{3}{5}\right)$. Данная система уравнений может быть переписана в виде

$$\begin{cases} x(2x + y) = 8x - 3y, \\ y(2x + y) = 3x - 2y. \end{cases}$$

Если первое уравнение системы умножить на y, а второе на x, и вычесть затем получившиеся уравнения друг из друга, получится уравнение $y(8x - 3y) - x(3x - 2y) = 0$, которое после упрощения приводится к виду

$$3x^2 + 3y^2 - 10xy = 0.$$

Пара чисел $x = 0$, $y = 0$ удовлетворяет этому последнему уравнению и, как легко видеть, исходной системе уравнений.

Далее можно считать, что $x \neq 0$. Обозначив $t = \dfrac{y}{x}$ и разделив обе части последнего уравнения на x, получим квадратное уравнение $3t^2 - 10t + 3 = 0$. Его корни равны 3 и $\dfrac{1}{3}$. Поэтому должно выполняться одно из равенств $y = 3x$ или $y = \dfrac{1}{3}x$. Подставляя эти выражения в первое уравнение исходной системы и учитывая, что $x \neq 0$, найдем еще две пары чисел $x = -\dfrac{1}{3}$, $y = -\dfrac{3}{5}$ и $x = 3$, $y = 1$. Эти пары чисел, как легко убедиться с помощью проверки, также являются решениями исходной системы уравнений.

11. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. *Указание.* Проведите плоскость через одно из выбранных ребер и середину другого. Этим задача сводится к плоской.

12. $0 < x \leq 2$. *Указание.* Функция, стоящая в левой части неравенства, монотонно возрастает на множестве $x > 0$ и принимает значение 4 в точке $x = 2$. Значит, множество решений данного неравенства имеет вид $0 < x \leq 2$.

Механика

1. Относительно неподвижной системы отсчета, которую будем считать инерциальной, пластинка совершает сложное движение – суперпозицию поступательного движения и вращения. Поскольку поверхность, по которой скользит пластинка, гладкая и горизонтальная, скорость $\vec{v}_Ц$ центра масс пластинки (точки $Ц$) постоянна. Рассмотрим мгновенное положение пластинки в момент времени $t = 0$ (рис.10). Проведем биссектрису AO угла BAC и восстановим перпендикуляр CO к стороне AC в вершине C. В момент времени $t = 0$ по условию $\vec{v}_A \perp AO$ и $\vec{v}_C \perp CO$. Следовательно, движение пластинки в этот момент времени можно представить как вращение с некоторой угловой скоростью ω вокруг мгновенной оси, перпендикулярной плоскости рисунка и проходящей через точку O. Поскольку

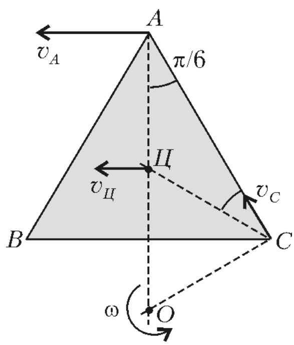


Рис. 10

$$OЦ = OC = \frac{AO}{2} \text{ и } \omega = \frac{v_A}{AO} = \frac{\vec{v}_Ц}{OЦ},$$

то

$$v_Ц = \frac{\vec{v}_A}{2}.$$

Учитывая, что точка $Ц$ движется равномерно и прямолинейно, получаем ответ:

$$\Delta\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{v}_A\tau.$$

2. Для того чтобы сдвинуть брусок вдоль наклонной плоскости вверх, нужно приложить к нему силу, модуль которой

$$F_0 = F_{ск} + F_{тр},$$

где $F_{ск} = mg\sin\alpha$ – модуль «скатывающей» силы (составляющей силы тяжести вдоль наклонной плоскости), $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$ – модуль максимальной силы трения покоя, равный модулю силы трения скольжения. При действии на брусок горизонтальной силы $\vec{F}_1$ направление силы трения изменится, а модуль ее останется таким же. Силы, действующие на брусок в этом случае,

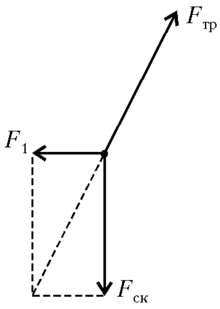


Рис. 11

изображены на рисунке 11 в проекции на наклонную плоскость. Брусок сдвинется с места, когда

$$F_1^2 + F_{ск}^2 = F_{тр}^2 .$$

Из записанных выражений находим

$$F_{тр} = \frac{F_0^2 + F_1^2}{2F_0}, \quad F_{ск} = \frac{F_0^2 - F_1^2}{2F_0}, \quad \frac{F_{тр}}{F_{ск}} = \frac{\mu}{\operatorname{tg}\alpha} .$$

Решая эту систему уравнений относительно искомого коэффициента трения, получаем ответ:

$$\mu = \frac{1+k^2}{1-k^2}\operatorname{tg}\alpha = 0,325 .$$

3. Когда шарик касается обода колеса, удлинение пружины составляет $\Delta l = R - l$. Центростремительное ускорение шарика при этом равно $a = \omega^2 R$, где ω – угловая скорость вращения колеса. Согласно второму закону Ньютона и закону Гука, в случае касания шариком обода уравнение движения шарика имеет вид

$$m\omega^2 R = k(R - l) .$$

При этом модуль линейной скорости шарика и всех точек обода колеса $v = \omega R$. Следовательно, кинетическая энергия вращающегося обода с грузом

$$E_к = \frac{1}{2}(m + M)\omega^2 R^2 ,$$

а потенциальная энергия растянутой пружины

$$E_п = \frac{1}{2}k(R - l)^2 .$$

Согласно закону изменения механической энергии, работа по раскручиванию колеса

$$A = E_к + E_п .$$

Подставляя в это выражение записанные выше соотношения, получаем ответ:

$$A = \frac{1}{2}k(R - l)\left(\left(2 + \frac{M}{m}\right)R - l\right).$$

4. Совместим начало системы отсчета, связанной с кабиной лифта, с нижним концом недеформированной пружины, а координатную ось $0x$ направим вертикально вниз. Когда кабина неподвижна, координата гири в положении равновесия равна

$$x_0 = \frac{mg}{k}.$$

В момент начала движения кабины скачком смещается вниз положение равновесия гири, координата которой в равновесии становится равной

$$x_1 = \frac{m(g+a)}{k}.$$

В результате начинаются гармонические колебания гири с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

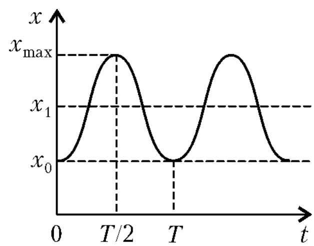


Рис. 12

который не зависит от ускорения кабины. График зависимости координаты гири x от времени t изображен на рисунке 12, на котором $t = 0$ соответствует моменту начала движения кабины. Как видно из рисунка, время τ, за которое длина пружины достигает максимального значения, равно половине периода колебаний гири:

$$\tau = \frac{T}{2}.$$

Путь, пройденный кабиной за это время, равен

$$s = \frac{a\tau^2}{2}.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$s = \frac{\pi^2 am}{2k} \approx 0,49 \text{ м}.$$

5. Угол отклонения маятника от вертикали изменяется во времени по закону

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t,$$

где $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – круговая частота. Следовательно, модуль линейной скорости маятника $v = l|\alpha'|$ зависит от времени следующим образом:

$$v = \alpha_0 l\omega |\sin \omega t|.$$

Здесь через α' обозначена производная от угла α по времени. Модуль вертикальной составляющей $\vec{v}_y$ скорости маятника равен (рис.13)

$$\left|v_y\right| = \left|v\sin\alpha\right| \approx \left|v\alpha\right| =$$

$$= \alpha_0^2 l\omega\left|\sin\omega t\cos\omega t\right| = \frac{\alpha_0^2 l\omega}{2}\left|\sin 2\omega t\right| .$$

Максимальное значение этой величины достигается при $\left|\sin 2\omega t\right| = 1$. Отсюда получаем

$$v_{y\max} = \frac{1}{2}\alpha_0^2\sqrt{gl} = 1 \text{ см/с} .$$

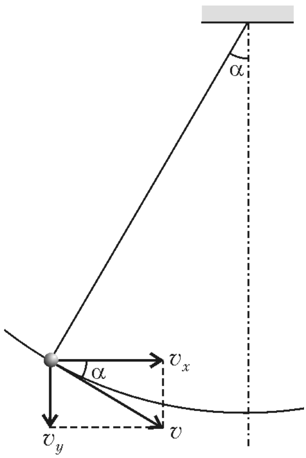


Рис. 13

6. Смещение уровней жидкости от положения равновесия на расстояние x приведет к появлению в нижнем сечении U-образной трубки разности давлений, равной $2\rho g x$. Вследствие этого возникнет сила, возвращающая жидкость в положение равновесия и равная по модулю $2S\rho g x$. Под действием этой силы жидкость придет в ускоренное движение, причем модуль ускорения каждой частицы жидкости будет одним и тем же. Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения жидкости имеет вид

$$ma = -2S\rho g x .$$

Это уравнение описывает гармонические колебания жидкости с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{2\rho g S}{m}} .$$

Учитывая, что период колебаний T связан с круговой частотой ω формулой $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получаем ответ:

$$T = \pi\sqrt{\frac{2m}{\rho g S}} \approx 1 \text{ с} .$$

Молекулярная физика и термодинамика

1. На участке пластинки площадью S за время τ осаждается масса серебра

$$M_0 = mN_0 S\tau ,$$

где m – масса атома серебра, N_0 – число атомов, попадающих на единичную площадку в единицу времени. С другой стороны,

$$M_0 = \rho v_0 S\tau .$$

Из этих выражений находим

$$v_0 = \frac{mN_0}{\rho}.$$

Давление, оказываемое атомами, осаждающимися на пластинке, равно

$$p = muN_0,$$

где u – скорость атомов, летящих к пластинке. Следовательно,

$$v_0 = \frac{p}{\rho u}.$$

Учитывая, что

$$u = \sqrt{\frac{2E}{m}} \text{ и } m = \frac{\mathrm{M}}{N_\mathrm{A}},$$

получаем ответ:

$$v_0 = \frac{p}{\rho}\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{2EN_\mathrm{A}}} \approx 9 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}.$$

2. Внутренняя энергия гелия (идеального одноатомного газа) равна суммарной кинетической энергии теплового движения его атомов:

$$U = \frac{m}{\mathrm{M}} N_\mathrm{A} \frac{m_0 v^2}{2} = \frac{mv^2}{2},$$

где m – масса гелия, М – его молярная масса, N_A – постоянная Авогадро, m_0 – масса атома гелия, v – средняя квадратичная скорость атомов гелия. С другой стороны, внутренняя энергия гелия связана с его абсолютной температурой T формулой

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{\mathrm{M}} RT,$$

где R – универсальная газовая постоянная. Уравнение состояния гелия имеет вид

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT,$$

где p – давление гелия, V – объем сосуда. Из записанных выражений находим

$$p = \frac{mv^2}{3V}.$$

После установления равновесия внутренняя энергия гелия по условию должна быть равна сумме первоначальных внутренних энергий гелия в первом и во втором сосудах, т.е.

$$\frac{(m + nm)v_\text{к}^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{nmv_2^2}{2},$$

где $v_к$ – средняя квадратичная скорость атомов гелия в конечном состоянии. Отсюда

$$v_к^2 = \frac{v_1^2 + nv_2^2}{n+1} .$$

Таким образом,

$$\frac{p_к}{p_1} = \frac{(1+n)v_к^2}{2v_1^2} = \frac{1}{2}\left(1 + n\frac{v_2^2}{v_1^2}\right).$$

3. В соответствии с первым законом термодинамики,

$$\Delta Q = \Delta U + A ,$$

где

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T - T_0)$$

– изменение внутренней энергии газа,

$$A = \frac{k}{2}\left(4h^2 - h^2\right)$$

– работа газа, равная изменению потенциальной энергии упругой деформации пружины. Из уравнений Клапейрона–Менделеева, записанных для начального и конечного состояний газа, находим

$$p_0V_0 = \frac{kh}{S}hS = kh^2 = \nu RT_0 ,\ \ pV = \frac{k\cdot 2h}{S}\cdot 2hS = 4kh^2 = \nu RT .$$

Следовательно,

$$\Delta U = \frac{9}{2}kh^2 .$$

Учитывая, что $A = \dfrac{3}{2}kh^2$, получаем ответ:

$$\Delta Q = 6kh^2 = 24 \text{ Дж} .$$

4. До погружения в воду в стакане находилась смесь воздуха и водяного пара, причем давление этой смеси равно

$$p_0 = p_в + p_п ,$$

где $p_в$ – парциальное давление воздуха, $p_п = fp_н/100\%$ – парциальное давление пара. Отсюда

$$p_в = p_0 - \frac{f}{100\%}p_н .$$

После медленного погружения стакана в воду пар в стакане достиг насыщения, и давление газовой смеси в стакане стало равным

$$p_1 = p'_в + p_н,$$

где $p'_в$ − парциальное давление воздуха, $p_1 = \rho g h + p_0$ − давление воды на глубине h. Для парциального давления воздуха справедливо уравнение

$$p'_в V_1 = p_в V_0.$$

Объединяя записанные выражения, находим давление насыщенного водяного пара:

$$p = p_н = \frac{\rho g h V_1 - p_0 (V_0 - V_1)}{V_1 - V_0 f/100\%} = 5 \text{ кПа}.$$

5. По определению, КПД тепловой машины равен

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = 1 - \frac{Q_х}{Q_н},$$

где A − работа, совершенная машиной за цикл, $Q_н$ − количество теплоты, полученное рабочим телом от нагревателя, $Q_х$ − количество теплоты, отданное рабочим телом холодильнику. Для цикла Карно

$$\eta = 1 - \frac{T_х}{T_н},$$

где $T_н$ − температура нагревателя, а $T_х$ − температура холодильника. Поскольку цикл Карно обратим, его можно провести в обратном направлении. При этом рабочее тело будет проходить те же состояния, что и в тепловой машине, но в обратном порядке, и тепло будет передаваться не от нагревателя к холодильнику, а наоборот (за счет совершенной работы) − от холодильника к нагревателю. Поскольку $A = N\tau$, то для количества теплоты, полученного от холодильника, справедливо выражение

$$Q_х = \frac{N\tau T_х}{T_н - T_х}.$$

При этом, в соответствии с условием задачи,

$$T_х = t + 273° \text{ и } T_н = T.$$

По уравнению теплового баланса,

$$Q_х = \lambda M.$$

Решая записанную систему уравнений относительно искомой массы воды, получаем ответ:

$$M = \frac{N\tau (t + 273°)}{(T - t - 273°)\lambda} \approx 35 \text{ кг}.$$

6. Считая, что воздух и насыщенный водяной пар подчиняются уравнению Менделеева–Клапейрона, запишем уравнения начального состояния этих веществ:

$$pV_0 = \nu_{\text{в}} RT\ ,\ \ p_{\text{н}} V_0 = \nu_{\text{п}} RT\ ,$$

где p и $p_{\text{н}}$ – парциальные давления воздуха и насыщенного пара в смеси, R – универсальная газовая постоянная, T и V_0 – абсолютная температура и начальный объем смеси, $\nu_{\text{в}}$ – число молей воздуха, $\nu_{\text{п}}$ – число молей водяного пара в начальном состоянии, причем по условию $\nu_{\text{в}} = n\nu_{\text{п}}$. Отсюда находим

$$p = \frac{n\nu_{\text{п}} RT}{V_0}\ ,\ \ p_{\text{н}} = \frac{\nu_{\text{п}} RT}{V_0}\ .$$

По закону Дальтона начальное давление смеси воздуха и водяного пара в цилиндре равно сумме их парциальных давлений:

$$p_0 = p + p_{\text{н}} = \frac{(n+1)\nu_{\text{п}} RT}{V_0}\ .$$

Поскольку масса воды в цилиндре равна начальной массе пара, то, для того чтобы вся вода испарилась, объем смеси нужно увеличить в 2 раза. При этом давление воздуха в цилиндре станет равным $p/2$, а давление пара не изменится. Следовательно, конечное давление смеси в цилиндре будет

$$p_{\text{к}} = \frac{p}{2} + p_{\text{н}} = \frac{(n+2)\nu_{\text{п}} RT}{2V_0}\ .$$

Окончательный ответ:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_0} = \frac{n+2}{2(n+1)} = \frac{5}{8} = 0{,}625\ .$$

Электродинамика

1. На внутренней поверхности внешней сферы индуцируется заряд $-q$. Поскольку эта сфера заземлена, заряд на ее внешней поверхности равен нулю. Поэтому электростатическое поле существует только в пространстве между внутренней и внешней сферами. Примем потенциал заземленной внешней сферы за ноль. Тогда потенциал сферы радиусом R будет равен

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}\ .$$

Следовательно, начальная энергия электростатического поля равна

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{12\pi\varepsilon_0 R}.$$

По прошествии достаточно большого времени после соединения внутренней и средней сфер весь заряд с внутренней сферы перейдет на среднюю сферу. Теперь электростатическое поле будет существовать только в пространстве между средней и внешней сферами. Потенциал средней сферы станет равным

$$\varphi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right) = \frac{q}{24\pi\varepsilon_0 R}.$$

Поэтому конечная энергия электростатического поля будет

$$W' = \frac{q\varphi'}{2} = \frac{q^2}{48\pi\varepsilon_0 R}.$$

При перемещении заряда по проводнику, соединяющему внутреннюю и среднюю сферы, выделится количество теплоты

$$\Delta Q = W - W' = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 R}.$$

2. Пусть пластинка выдвинута из конденсатора на x. Емкость конденсатора и заряд на нем при этом будут

$$C(x) = \frac{ax\varepsilon_0}{d} + \frac{a(a-x)\varepsilon_0\varepsilon}{d} = \frac{a\varepsilon_0}{d}\big(a\varepsilon - x(\varepsilon - 1)\big)$$

и $q(x) = C(x)\mathcal{E}$,

где $a = \sqrt{S}$. За малое время Δt пластинка переместится на расстояние $\Delta x = v_0\Delta t$, и заряд конденсатора уменьшится на

$$\Delta q = \frac{a\varepsilon_0\mathcal{E}}{d}(\varepsilon - 1)v_0\Delta t.$$

Учитывая, что

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t},$$

получаем ответ:

$$I = \sqrt{S}\,\frac{\varepsilon_0\mathcal{E}}{d}(\varepsilon - 1)v_0 \approx 7{,}1\cdot 10^{-8}\ \text{А}.$$

Ток внутри источника направлен от его положительной клеммы к отрицательной.

3. Мощность, выделяемая в нагревательном элементе при подключении его к одному аккумулятору, равна

$$P_1 = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(r+R)^2},$$

где R – сопротивление нагревателя, $\mathscr{E}$ – ЭДС аккумулятора, r – его внутреннее сопротивление. При подключении нагревателя к двум одинаковым аккумуляторам, соединенным последовательно, ЭДС и внутреннее сопротивление в цепи удваиваются, в результате чего мощность, выделяющаяся в нагревателе, будет

$$P_2 = \frac{4\mathscr{E}^2 R}{(2r+R)^2}.$$

Вводя величину $k = \sqrt{\frac{P_2}{P_1}}$, имеем $k = 2\frac{r+R}{2r+R}$. Отсюда

$$R = \frac{2r(k-1)}{2-k}.$$

Учитывая, что

$$\mathscr{E}^2 = \frac{(r+R)^2}{R} P_1,$$

получаем ответ:

$$\mathscr{E} = \sqrt{\frac{rP_2}{2\left(2-\sqrt{P_2/P_1}\right)\left(\sqrt{P_2/P_1}-1\right)}} = 12\ \text{В}.$$

4. Поскольку, по условию, поляризация электродов мала, то силу тока I в цепи можно считать постоянной. По закону Фарадея,

$$m = \frac{1}{F}\frac{\text{М}}{z} I\tau,$$

где $F = eN_\text{А} = 96{,}5$ кКл/моль – постоянная Фарадея, $z = 1$ – валентность, а $\text{М} = 1$ г/моль – атомарная масса водорода. Отсюда находим

$$I = \frac{mzF}{\text{М}\tau}.$$

С другой стороны, по закону Ома для полной цепи,

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r},$$

где R – сопротивление электролита, а r – внутреннее сопротивление батареи. По закону Джоуля–Ленца мощность, выделяющаяся во внешней цепи, равна

$$P = I^2 R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

Элементарный анализ этого выражения показывает, что максимальная мощность во внешней цепи выделяется при $R = r$ и она равна

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4R}.$$

При этом

$$I = \frac{\mathcal{E}}{2R}.$$

Поэтому максимальная мощность может быть записана в виде

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}I}{2} = \frac{\mathcal{E}mzeN_{\mathrm{A}}}{2\mathrm{M}\tau} \approx 24\ \text{Вт}.$$

5. Импульс силы Ампера за время τ равен $I_0BL\tau$. По второму закону Ньютона, $mv_0 = I_0BL\tau$, откуда скорость, которую приобретает стержень по окончании импульса тока, равна

$$v_0 = \frac{I_0BL\tau}{m}.$$

Уравнение движения стержня по окружности в верхней точке траектории имеет вид

$$\frac{mv^2}{l} = mg + T,$$

где T − суммарное натяжение нитей. Скорость стержня v в верхней точке минимальна, если $T = 0$. Следовательно,

$$v^2 = gl.$$

Из закона сохранения механической энергии вытекает равенство

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2mgl + \frac{mv^2}{2} = \frac{5}{2}mgl, \text{ откуда } v_0 = \sqrt{5gl}.$$

Объединяя записанные выражения, находим ответ:

$$I_0 = \frac{m\sqrt{5gl}}{BL\tau} \approx 12\ \text{А}.$$

6. Уравнение движения частицы по окружности в однородном магнитном поле имеет вид

$$\frac{mv_0^2}{R} = qv_0B,$$

где m − масса, q − заряд, v_0 − скорость частицы. Отсюда

$$v_0 = \frac{qBR}{m}.$$

Таким образом, кинетическая энергия частицы до включения электрического поля была

$$W_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m}.$$

После включения электрического поля частица за время Δt приобретет в направлении поля скорость $v_1 = \frac{qE}{m}\Delta t$, и кинетическая энергия частицы станет равной

$$W_1 = \frac{m\left(v_0^2 + v_1^2\right)}{2} = \frac{(qBR)^2}{2m} + \frac{(qE\Delta t)^2}{2m}.$$

По условию,

$$W_1 = nW_0.$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$\Delta t = \sqrt{n-1}\,\frac{BR}{E} = 0{,}16 \text{ с}.$$

Оптика

1. Рассмотрим ход лучей *1* и *2*, идущих от точки O, расположенной на дне озера (рис.14). Будем считать, что оба луча попадают в глаз рыбака и создают в нем изображение точки O.

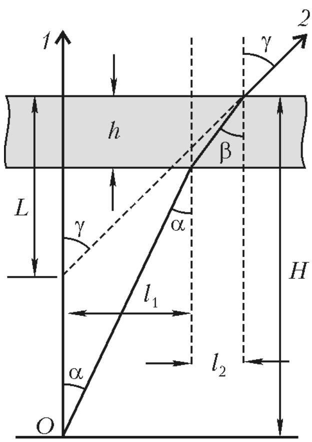


Рис. 14

Луч *1* падает нормально на нижнюю границу льда и не испытывает преломления. Луч *2* преломляется дважды, и поэтому кажущаяся глубина L озера отлична от реальной глубины H. Диаметр зрачка достаточно мал, поэтому и углы между лучами, попадающими в глаз рыбака, также малы. Следовательно, синусы и тангенсы углов падения и преломления равны величинам этих углов (в радианах). Используя закон преломления и обозначения, приведенные на рисунке, получаем

$$l_1 + l_2 = L\gamma, \quad l_1 = (H-h)\alpha, \quad l_2 = h\beta,$$

$$\gamma = n_л\beta = n_л\frac{n_в}{n_л}\alpha = n_в\alpha.$$

Отсюда находим

$$H = Ln_в - h\left(\frac{n_в}{n_л} - 1\right).$$

2. Часть световых лучей, испущенных источником, пройдет мимо линзы и сразу попадет на экран, образуя первую освещенную область. Другая часть лучей попадет вначале на линзу и после преломления в ней будет образовывать на экране вторую освещенную область. Между этими областями на экране будет наблюдаться темное кольцо с центром, расположенным на оси линзы (рис.15). Обозначим радиус линзы R, внутренний радиус темного кольца r_1, а внешний r_2. Из рисунка видно, что

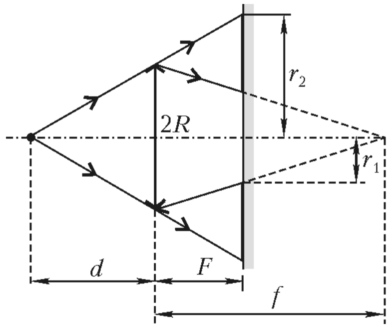


Рис. 15

$$\frac{r_1}{R} = \frac{f-F}{f} \quad \text{и} \quad \frac{r_2}{R} = \frac{d+F}{d}.$$

Учитывая, что, в соответствии с формулой тонкой линзы, $f = \dfrac{Fd}{d-F}$, находим

$$r_1 = \frac{RF}{d} \quad \text{и} \quad r_2 = \frac{R(d+F)}{d}.$$

Площадь темного кольца равна

$$S = \pi\left(r_2^2 - r_1^2\right) = \pi R^2\left(1 + \frac{2F}{d}\right).$$

Поскольку по условию задачи $S = n\pi R^2$, то искомое расстояние равно

$$d = \frac{2F}{n-1}.$$

3. На рисунке 16 изображено прохождение луча через плоскопараллельную пластинку, здесь α − угол падения, β − угол преломления, d − толщина пластинки. Видно, что при прохождении пластинки луч смещается параллельно самому себе на расстояние a, которое можно найти из равенств

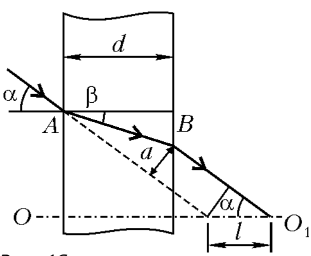


Рис. 16

$$AB = \frac{d}{\cos\beta} \quad \text{и} \quad AB = \frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Отсюда

$$a = d\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}.$$

В результате такого смещения точка пересечения луча с главной оптической осью линзы OO_1 сдвигается от линзы на расстояние

$$l = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

По закону преломления,

$$\sin\beta = \frac{1}{n}\sin\alpha.$$

С учетом малости углов α и β приближенно имеем

$$\sin\alpha = \alpha, \quad \sin\beta = \frac{\alpha}{n}, \quad \sin(\alpha-\beta) = \alpha\left(1-\frac{1}{n}\right), \quad \cos\beta = 1.$$

Объединяя записанные выражения, находим

$$l = d\frac{n-1}{n} = 2{,}8 \text{ мм}.$$

4. Лучи, падающие на призму, преломляются на ее задней грани и отклоняются от своего первоначального направления на угол δ (рис.17). Так как угол при вершине призмы $\alpha \ll 1$, то, согласно обозначениям, приведенным на рисунке, и закону преломления, $\delta = \beta - \alpha = (n-1)\alpha$. Пусть на экране *Э* в точках *A* и *O* наблюдаются соседние интерференционные максимумы, т.е. $AO = \Delta x$. Поскольку $\delta \ll 1$, разность хода *OB* лучей *1* и *2*, выходящих из призмы после преломления, приближенно равна $OB = \Delta x\delta$. Согласно условию образования максимумов в интерференционной картине, $OB = \lambda$. Из записанных выражений следует ответ:

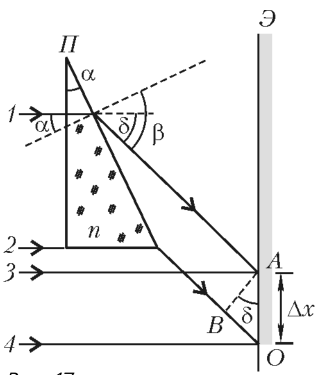


Рис. 17

$$\Delta x = \frac{\lambda}{(n-1)\alpha}.$$

5. Обозначим через Δ геометрическую разность хода двух лучей, идущих на расстоянии *r* от главной оптической оси линзы: луча *1′*, отраженного от верхней поверхности стеклянной пластинки, и луча *1″*, отраженного от нижней поверхности линзы (рис.18). По теореме Пифагора имеем

$$R^2 = r^2 + \left(R - \frac{\Delta}{2}\right)^2 .$$

Отсюда

$$R\Delta = r^2 + \frac{\Delta^2}{4} .$$

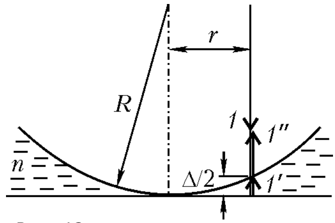


Рис. 18

Учитывая, что $\Delta^2/4 \ll r^2$, приближенно получаем

$$\Delta = \frac{r^2}{R} .$$

Поскольку волны, соответствующие лучам *1* и *1′*, частично распространяются в бензоле, заполняющем зазор между линзой и пластинкой, оптическая разность хода между лучами *1′* и *1″* равна

$$\Delta_{\text{опт}} = n\Delta = \frac{nr^2}{R} .$$

Дополнительный фазовый набег, равный π, волна, соответствующая лучу *1′*, приобретает при отражении от оптически более плотной среды. Таким образом, условие первого интерференционного минимума имеет вид

$$\Delta_{\text{опт}} + \frac{\lambda}{2} = \frac{3}{2}\lambda .$$

Объединяя записанные выражения, получаем ответ:

$$r = \sqrt{\frac{\lambda R}{n}} \approx 2 \text{ мм} .$$

6. Покидающие облучаемый шар электроны уносят с него отрицательный заряд, в результате чего шар заряжается положительно. Пусть при облучении шара светом с длиной волны λ_1 шар приобрел заряд q. Изменение потенциальной энергии электрона при перемещении его с поверхности шара в бесконечно удаленную точку равно

$$\Delta E_{\text{п}} = \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R} .$$

Зарядка шара прекращается, когда все электроны, покинувшие шар, возвращаются на него, т.е. когда их кинетическая энергия удовлетворяет условию

$$\frac{mv^2}{2} \le \Delta E_{\text{п}} .$$

Из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта следует, что

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda_1} - A .$$

Здесь A – работа выхода, которая связана с длиной волны λ_2, соответствующей красной границе фотоэффекта для цезия на вольфраме:

$$A = \frac{hc}{\lambda_2} .$$

Объединяя записанные выражения, получаем, что шар может приобрести максимальный заряд

$$q_{\max} = \frac{4\pi\varepsilon_0 Rhc}{e}\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right).$$

Этот ответ имеет смысл при выполнении условия $\lambda_1 < \lambda_2$. Если же $\lambda_2 < \lambda_1$, то фотоэффект не возникает и $q_{\max} = 0$.

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Олимпиада «Росатом»

МАТЕМАТИКА

1. а) $(5;3)$; б) $(5;3)$, $(11;7)$. **2.** а) $\pm\sqrt{5/2}$; б) -2. **3.** а) $\pi/6 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\{\pi/6 + \pi k, \pm 2\pi/3 + 2\pi n\}$, $k, n \in \mathbb{Z}$. **4.** $(0; 1/2) \cup (3/4; 1)$; $\left\{1; 6; 3; 6 - \frac{6}{\pi}\arcsin\frac{1}{4}\right\}$. **5.** а) $\frac{5}{2}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; б) $2\pi/3$.

ФИЗИКА

1. При последовательном соединении у всех конденсаторов заряды одинаковые, а напряжения складываются. Поэтому, когда к цепи приложили электрическое напряжение U и на каждом конденсаторе установился заряд Q, справедливо равенство

$$U = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{3C} + \frac{Q}{2C} .$$

Отсюда находим

$$Q = \frac{6CU}{11} .$$

2. Неравноплечность и уравновешенность весов означает, что их плечи имеют разные длины, но центр тяжести весов расположен в точке опоры и потому силу тяжести, действующую на сами весы, в условии равновесия весов учитывать не нужно. Используем далее правило рычага. Если масса тела M, а длины плеч l_1 и l_2, то условия равновесия весов имеют вид

$$Ml_1 = ml_2\,,$$

$$Ml_2 = 1{,}44ml_1\,.$$

Перемножая эти уравнения и сокращая произведение $l_1 l_2$, находим

$$M = 1{,}2m.$$

3. Зависимость угла отклонения маятника от положения равновесия φ от времени t задается уравнением

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin \omega t\,,$$

где $\omega = \sqrt{g/l}$ – циклическая частота колебаний. Дифференцирование зависимости $\varphi(t)$ по времени дает угловую скорость маятника, а чтобы найти его линейную скорость, нужно угловую скорость умножить на длину маятника:

$$v(t) = \varphi'(t)\,l = \varphi_0 \omega l \cos \omega t\,.$$

Из этой формулы следует, что максимальная скорость маятника равна $\varphi_0 \omega l$, а убывает скорость в два раза через время τ, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\varphi_0 \omega l}{2} = \varphi_0 \omega l \cos \omega \tau\,,$$

откуда находим

$$\tau = \frac{\pi}{3\omega} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

4. В равновесии сила тяжести, действующая на оболочку шара и гелий внутри, уравновешивается силой Архимеда, действующей на шар со стороны окружающего воздуха:

$$m + M = m\left(1 + \frac{M}{m}\right) = \rho V\,,$$

где m и M – массы гелия и оболочки шара, ρ – плотность воздуха. Величину M/m, которую нам нужно найти, далее обозначим буквой x. Выразим величины m и ρ с помощью уравнения Клапейрона–Менделеева. Для гелия внутри шара имеем

$$pV = \frac{m}{\text{М}_\text{г}} RT,\; m = \frac{pV\text{М}_\text{г}}{RT}\,.$$

Чтобы найти плотность воздуха, рассмотрим некоторый объем воздуха v. Учитывая, что давление воздуха равно давлению гелия внутри шара (оболочка по условию не обладает упругостью) и температуры газов равны, имеем

$$pv = \frac{m_1}{\text{M}_\text{в}} RT, \ \rho = \frac{p\text{M}_\text{в}}{RT},$$

где m_1 – масса воздуха в рассматриваемом объеме, $\rho = m_1/v$ – плотность воздуха. Теперь из условия равновесия получим

$$\frac{pV\text{M}_\text{г}}{RT}(1+x) = \frac{pV\text{M}_\text{в}}{RT},$$

откуда найдем

$$x = \frac{M}{m} = \frac{\text{M}_\text{в} - \text{M}_\text{г}}{\text{M}_\text{г}} = 6,25 .$$

5. Основная трудность задачи заключается в том, что тело движется не по прямой и поэтому направление силы трения непрерывно изменяется. Это означает, что, несмотря на постоянство величин действующих на тело сил (тяжести, реакции опоры и трения), его движение не является равноускоренным.

Рассмотрим промежуточное положение тела, когда вектор его скорости направлен под некоторым углом γ к направлению наибыстрейшего спуска с плоскости (рис.19). На тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила трения $\vec{F}_\text{тр}$, направленная противоположно скорости, и сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно плоскости. Чтобы не загромождать рисунок, мы изобразили только силу трения и составляющую силы тяжести, параллельную плоскости, величина которой равна $mg\sin\alpha$. Второй закон Ньютона дает

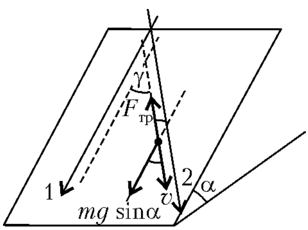


Рис. 19

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_\text{тр}.$$

Спроецируем это уравнение на две оси: в направлении наибыстрейшего спуска с плоскости и параллельную скорости тела в рассматриваемый момент – эти оси на рисунке отмечены цифрами 1 и 2 соответственно. В результате получим

$$ma_1 = mg\sin\alpha - F_\text{тр}\cos\gamma,$$

$$ma_2 = mg\sin\alpha\cos\gamma - F_\text{тр},$$

где a_1 и a_2 – проекции вектора ускорения тела на рассматриваемые оси. Учтем теперь, что по условию $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. В этом случае справедливо равенство

$$F_{тр} = \mu mg \cos\alpha = mg \sin\alpha .$$

Из трех последних уравнений получим

$$a_1 + a_2 = 0 .$$

Проекция ускорения тела на ось 1 определяет скорость изменения проекции скорости тела на направление наибыстрейшего спуска с плоскости, а проекция ускорения тела на ось 2 – скорость изменения величины скорости. Поэтому из равенства $a_1 + a_2 = 0$ следует, что сумма проекций скорости остается неизменной в любой момент времени. В частности, значение этой суммы в начальный момент времени равно ее значению в тот момент, когда вектор скорости наклонен под углом β к направлению наибыстрейшего спуска:

$$v_0 = v_1 + v_1 \cos\beta .$$

Отсюда находим

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + \cos\beta} .$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\rho = \frac{3}{2\sqrt{5}}$, $R = \frac{\sqrt{265}}{32}$.

Пусть E – проекция точки D на прямую AB. Так как $S_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} \sin\angle ACB$, а $S_{\Delta ADC} = \frac{AC \cdot DC}{2} \sin\angle ACB$, то $\frac{BC}{DC} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADC}} = 4$. Следовательно, $DC = \frac{BC}{4}$ и $BD = \frac{3BC}{4}$. Имеем $BC = \frac{1}{2 \sin \operatorname{arctg} \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Тогда $BD = \frac{3\sqrt{5}}{8}$ и

$DE = BD \sin\angle ABC = \frac{3\sqrt{5}}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$ – расстояние от точки D до прямой AB. Далее, по теореме косинусов из ΔADC получаем

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cos\angle ACD = 1 + \frac{5}{64} - \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{53}{64} .$$

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен

$$R = \frac{AD}{2\sin\angle ACD} = \frac{\sqrt{53}}{16}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{265}}{32}.$$

2. πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

Так как

$$\sin 3x\cos 5x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 2x\right),$$

$$\sin 2x\cos 6x = \frac{1}{2}\left(\sin 8x - \sin 4x\right),$$

то уравнение равносильно

$$\frac{\sin 4x - \sin 2x}{2\cos x} = \frac{\sin x\cos 3x}{\cos x} = 0.$$

Так как $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, то получаем

$$\sin x\left(4\cos^2 x - 3\right) = \sin x\left(2\cos 2x - 1\right) = 0$$

при условии $\cos x \neq 0$. Тогда либо $\sin x = 0$ и $x = \pi n$ − решения, либо $\cos 2x = \frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{\pi}{6}+\pi n$ − решения.

3. $x\in\left(-2;18\right]$.

ОДЗ: $x\in\left(-2;18\right]$. Если $x\in\left(0;18\right]$, то левая часть неравенства неотрицательна, а правая − отрицательна. Следовательно, это решения. Если же $x\in\left(-2;0\right]$, то обе части неравенства неотрицательны. В этом случае неравенство равносильно

$$0 > x^3 + 2x^2 + x - 18 = \left(x-2\right)\left(x^2+4x+9\right).$$

Так как $x^2+4x+9>0$ при всех x, то получаем $0 > x-2$ − верно при всех $x\in\left(-2;0\right]$, т.е. это решения.

4. $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2};\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2};\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

С учетом ОДЗ ($x>0$, $y>1$, $x\neq 1$, $y\neq 2$) система преобразуется равносильным переходом к виду

$$\begin{cases} uv = 2, \\ u+v = 3, \end{cases}$$

где $u=\log_x\left(y+1\right)$, $v=\log_{y-1}\left(x+2\right)$. Отсюда либо $u=1$, $v=2$, либо $u=2$, $v=1$.

В первом случае имеем

$$\begin{cases} y+1=x, \\ x+2=(y-1)^2. \end{cases}$$

Далее, $y^2-3y-2=0$, откуда $y=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$, $x=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. С учетом ОДЗ получаем $x=\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ – в ответ.

Во втором случае имеем

$$\begin{cases} y+1=x^2, \\ x+2=y-1. \end{cases}$$

Далее $x^2-x-4=0$, откуда $x=\dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$, $y=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{2}$. С учетом ОДЗ получаем $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ и $y=\dfrac{7+\sqrt{17}}{2}$ – в ответ.

5. $a=2+\sqrt{2}$.

Первое уравнение системы можно записать в виде

$$y=\begin{cases} 1, & |x|\le 1, \\ |x|, & |x|>1. \end{cases}$$

Второе уравнение системы преобразуется к виду $x^2+(y-a)^2=(a-1)^2$ и является уравнением окружности с центром в точке $(0;a)$ и радиусом $|a-1|$. Эта окружность при любом значении a проходит через точку $A(0;1)$ и касается прямой $y=1$. Если $a<1$, то окружность лежит ниже прямой $y=1$, и данная система в этом случае имеет единственное решение $(0;1)$. При $a=1$ окружность вырождается в точку A, т.е. в этом случае система тоже имеет единственное решение $(0;1)$. Если же $a>1$, то окружность расположена выше прямой $y=1$, и система кроме решения $(0;1)$ будет иметь еще два решения (симметричных относительно прямой $x=0$) в том случае, когда окружность касается прямых $y=x$ и $y=-x$. Это означает, что система

$$\begin{cases} y=x, \\ x^2+(y-a)^2=(a-1)^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение, т.е. уравнение $x^2+(x-a)^2=(a-1)^2$ имеет единственный корень. Это уравнение можно записать так: $2x^2-2ax+2a-1=0$, откуда $D=4a^2-8(2a-1)=$

$= 4\left(a^2 - 4a + 2\right) = 0$, т.е. $a = 2 \pm \sqrt{2}$. Так как $a > 1$, то получаем $a = 2 + \sqrt{2}$.

6. $AA_1 = 6$, $\rho = \dfrac{18}{5}$, $R = \dfrac{4\sqrt{39}}{5}$.

Обозначим $AB = 2b = 8$, $SC = h = 15$. Пусть E и K − проекции точки O на прямые BC и SC соответственно. Пусть $OE = x$, $OA_1 = OB_1 = OC_1 = R$ − радиус сферы. Так как OE − перпендикуляр к плоскости ABC, а $OB_1 \perp AB$, то по теореме о трех перпендикулярах получаем $B_1E \perp AB$. Аналогично $C_1E \perp AC$. Из равенства прямоугольных треугольников OB_1E и OC_1E следует, что $B_1E = C_1E$. Из равенства прямоугольных треугольников BB_1E и CC_1E (так как $\angle B = \angle C = \dfrac{\pi}{3}$) получаем, что $BE = CE = b = 4$. Тогда $B_1B = \dfrac{b}{2} = C_1C$, $C_1A = B_1A = \dfrac{3}{2}b$, $B_1E = \dfrac{b\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, из равенств отрезков касательных, проведенных к сфере из точки A, следует, что $AA_1 = AB_1 = \dfrac{3}{2}b = 6$.

Для нахождения x и R выразим SO из треугольников SKO и SOA_1. Так как $OK = CE = b$ и $SK = h - x$, то

$$SO^2 = (h - x)^2 + b^2 = OA_1^2 + SA_1^2,$$

где

$$OA_1^2 = R^2 = OE^2 + B_1E^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2,$$

$$SA_1 = SA - AA_1 = \sqrt{h^2 + 4b^2} - \frac{3}{2}b.$$

Следовательно,

$$(h - x)^2 + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + \left(\sqrt{h^2 + 4b^2} - \frac{3}{2}b\right)^2,$$

откуда получаем

$$x^2 + h^2 - 2xh + b^2 = x^2 + \frac{3}{4}b^2 + h^2 + 4b^2 + \frac{9}{4}b^2 - 3b\sqrt{h^2 + 4b^2},$$

т.е.

$$x = \frac{3b}{2h}\left(\sqrt{h^2 + 4b^2} - 2b\right) = \frac{12}{30}\left(\sqrt{15 \cdot 15 + 64} - 8\right) = \frac{2}{5}(17 - 8) = \frac{18}{5}.$$

Тогда

$$R = \sqrt{x^2 + \frac{3}{4}b^2} = \sqrt{\frac{18 \cdot 18}{25} + \frac{3}{4} \cdot 16} = \frac{4\sqrt{39}}{5}.$$

Вариант 2

1. $(-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

ОДЗ: $x \in (-2; -1) \cup (-1; +\infty)$. Если $x \in (-2; -1)$, то $x + 2 < 1$, а $\sqrt{x+3} + 1 > 1$. Следовательно, получаем $\log_{x+2}\left(\sqrt{x+3}+1\right) <$, $< 0 < 1$ и поэтому $x \in (-2; -1)$ − решения. Если же $x > -1$, то $x + 2 > 1$ и неравенство равносильно $\sqrt{x+3} \le x + 1$, которое имеет решение $x \in [1; +\infty)$.

2. $(3; 4)$, $(3; -4)$, $\left(-1; 2\sqrt[4]{6}\right)$, $\left(-1; -2\sqrt[4]{6}\right)$.

Перемножив уравнения системы, получим $y^2 - x^2 = y^2 -$ $- 2x^2 + 2x + 3$, т.е. $x^2 - 2x - 3 = 0$, откуда $x = 3$ или $x = -1$.

При $x = 3$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25 - y^2} = 3$, откуда $y = \pm 4$. Подставляя $x = 3$ и $y = \pm 4$ во второе уравнение системы, получаем $4 + 3 = 7 = 16 - 18 + 6 + 3$ − тождество. Таким образом, обе пары $(3; -4)$ и $(3; 4)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

При $x = -1$ из первого уравнения системы находим $\sqrt{25 - y^2} = 2\sqrt{6} - 1$, откуда $y^2 = 4\sqrt{6}$ и $y = \pm 2\sqrt[4]{6}$. Подставляя $x = -1$ и $y = \pm 2\sqrt[4]{6}$ во второе уравнение системы, получаем $2\sqrt{6} + \sqrt{25 - 4\sqrt{6}} = 4\sqrt{6} - 4 + 3$, т.е. $\sqrt{25 - 4\sqrt{6}} = 2\sqrt{6} - 1$, что равносильно $25 - 4\sqrt{6} = 24 - 4\sqrt{6} + 1$ − тождество. Таким образом, обе пары $\left(-1; 2\sqrt[4]{6}\right)$ и $\left(-1; -2\sqrt[4]{6}\right)$ удовлетворяют второму уравнению системы.

3. $x = \pi n$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим случай $t = \sin x \ge 0$. Исходное уравнение примет вид $\sin 3x + 3\sin x = -2\sin 3x \sin x$. Так как $\sin 3x = 3\sin x -$ $- 4\sin^3 x$, то получаем $\left(3t - 4t^3\right)(1 + 2t) + 3t = 0$. Отсюда находим

$$t\left(4t^3 + 2t^2 - 3t - 3\right) = t\,(t-1)\left(4t^2 + 6t + 3\right) = 0.$$

Уравнение $4t^2 + 6t + 3 = 0$ не имеет корней. Следовательно, либо $t = \sin x = 0$ и $x = \pi n$, либо $t = \sin x = 1$ и $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n$.

Теперь рассмотрим случай $t = \sin x < 0$. Тогда исходное уравнение примет вид $t^2\left(4t^2 + 2t - 3\right) = 0$. Уравнение $4t^2 + 2t - 3 = 0$

имеет корни $t_1 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{4} < -1$ и $t_2 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{4} > 0$, т.е. в этом случае решений у исходного уравнения нет.

4. Площадь: $\dfrac{1}{3\sqrt{5}}$, расстояние: $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$, угол: $\arcsin\dfrac{4}{5}$.

Имеем $AO = 1$, $AS = \sqrt{5}$. Пусть $2\alpha = \angle ASC$, $2\beta = \angle ASD$. Тогда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \sin 2\alpha = \frac{4}{5},\ \cos 2\alpha = \frac{3}{5},$$

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}},\ \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin 2\beta = \frac{3}{5},\ \cos 2\beta = \frac{4}{5},\ \operatorname{tg} 2\beta = \frac{3}{4}.$$

Пусть плоскость Π пересекается с прямыми AS, CS и DS в точках M, N и P соответственно. В плоскости ASC из прямоугольного ΔKSM имеем $SM = SK\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Далее из прямоугольного ΔNMS имеем

$$SN = \frac{SM}{\cos 2\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3},\ MN = SN\sin 2\alpha = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

В плоскости ASD из прямоугольного ΔPMS имеем $MP = SM\operatorname{tg} 2\beta = \dfrac{3}{4\sqrt{5}}$, $SP = \dfrac{SM}{\cos 2\beta} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Так как SM перпендикулярна плоскости Π, то углом между прямой SD и плоскостью Π является $\angle SPM = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta = \arcsin\dfrac{4}{5}$. Так как $DP = SD - SP = \sqrt{5} - \dfrac{\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3\sqrt{5}}{4}$, то расстояние от точки D до плоскости Π равно $DP\sin\angle SPM = \dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

В плоскости CDS из ΔPNS по теореме косинусов находим $PN^2 = \dfrac{5}{16} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{5} = \dfrac{29}{9\cdot 16}$. Рассмотрим ΔMPN. Пусть $\angle PMN = \varphi$. Тогда по теореме косинусов получаем $\dfrac{29}{9\cdot 16} = \dfrac{9}{16\cdot 5} + \dfrac{16}{9\cdot 5} - \dfrac{2}{5}\cos\varphi$, откуда $\dfrac{145}{9\cdot 16} = \dfrac{9\cdot 9 + 16\cdot 16}{9\cdot 16} - 2\cos\varphi$, и $\cos\varphi = \dfrac{2}{3}$. Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, и искомая площадь сечения равна $MP\cdot MN\cdot\sin\varphi = \dfrac{1}{3\sqrt{5}}$.

5. $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$, $y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$.

Сложив уравнения системы, получим

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 4 .$$

Это равенство равносильно $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = 1$ и $\sin\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$. Следовательно, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$ и $y = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi s$, $k, s \in \mathbb{Z}$. Подставляя полученные значения x и y в исходную систему, получаем $\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$ и $1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$, т.е. это решения.

6. $R = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$, $AC = 2\sqrt{\dfrac{10}{3}}$, $BD = 2\sqrt{\dfrac{26}{3}}$.

Пусть M, K, N, E − точки касания вписанной в трапецию окружности со сторонами AB, BC, CD и AD соответственно. Пусть P − середина AB, Q − середина CD, так что PQ − средняя линия трапеции. Пусть F и T − проекции точек B и C на AD. Пусть R − радиус вписанной в трапецию окружности, h − высота трапеции. Тогда $h = 2R$. Обозначим $BM = BK = x$, $CN = CK = y$. Тогда $AM = AE = 3 - x$, $DN = DE = 5 - y$, $BC = x + y$, $AD = AE + DE = 8 - (x + y)$, $PQ = \dfrac{BC + AD}{2} = 4$, $AF = AE - FE = 3 - 2x$, $DT = DE - TE = 5 - 2y$. Пусть S_1 и S_2 − площади трапеций $PBCQ$ и $APQD$. Тогда

$$S_1 = \frac{R}{2}(BC + PQ) = \frac{R}{2}(4 + x + y) ,$$

$$S_2 = \frac{R}{2}(PQ + AD) = \frac{R}{2}(12 - x - y) .$$

По условию, $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{5}{11} = \dfrac{4 + x + y}{12 - (x + y)}$, откуда $x + y = 1$. Так как

$$BF^2 = h^2 = AB^2 - AF^2 = 9 - (3 - 2x)^2 = 4\left(3x - x^2\right)$$

и

$$CT^2 = h^2 = CD^2 - DT^2 = 25 - (5 - 2y)^2 = 4\left(5y - y^2\right),$$

то $3x - x^2 = 5y - y^2$. Поскольку $x = 1 - y$, то $3(1 - y) - (1 - y)^2 = 5y - y^2$, откуда $y = \dfrac{1}{3}$, $x = \dfrac{2}{3}$, $R = \sqrt{5y - y^2} = \dfrac{\sqrt{14}}{3}$,

$$AT = 3 - x + y = \frac{8}{3}, \ \ DF = 5 - y + x = \frac{16}{3},$$

$$AC = \sqrt{CT^2 + AT^2} = \sqrt{\frac{56}{9} + \frac{64}{9}} = 2\sqrt{\frac{10}{3}},$$

$$BD = \sqrt{BF^2 + DF^2} = \sqrt{\frac{56}{9} + \frac{256}{9}} = 2\sqrt{\frac{26}{3}}.$$

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Силы тяги на горизонтальном участке, на спуске и на подъеме равны, соответственно,

$$F_{\text{гор}} = \frac{N}{v}, \ \ F_{\text{сп}} = \frac{N}{3v/2},$$

$$F_{\text{под}} = \frac{2N}{v/2}.$$

Пусть k – коэффициент пропорциональности между силой сопротивления и скоростью, β – угол наклона поверхности дороги к горизонту на подъеме. Так как ускорение на всех участках равно нулю, то

$$F_{\text{гор}} - kv = 0,$$

$$F_{\text{сп}} + mg\sin\alpha - k\frac{3v}{2} = 0,$$

$$F_{\text{под}} - mg\sin\beta - k\frac{v}{2} = 0.$$

Из записанных уравнений (с учетом значения $\sin\alpha = 1/30$) находим

$$\sin\beta = \frac{7}{50}.$$

2. Пусть V и ρ – объем и плотность стержня соответственно, T – начальная сила натяжения нити. Условия равновесия стержня до и после его перемещения имеют вид

$$\rho Vg - \rho_0 \cdot 0{,}7Vg = T,$$

$$\rho Vg - \rho_0 \cdot 0{,}3Vg = 1{,}2T.$$

Отсюда находим

$$\rho = 2{,}7\rho_0 = 2{,}7 \ \text{г/см}^3.$$

3. Обозначим через V_2, p_2, T_2 и V_3, p_3, T_3 объем, давление и температуру в точках *2* и *3* соответственно. Работа газа в процессе *2–3* равна разности площадей двух треугольников на графике зависимости давления от объема (см. рисунок к условию задачи):

$$A_{23} = \frac{1}{2} p_3 V_3 - \frac{1}{2} p_2 V_2 .$$

Уравнения состояния в точках *2* и *3* имеют вид

$$p_2 V_2 = \nu R T_2,\ p_3 V_3 = \nu R T_3.$$

По первому началу термодинамики для процессов *1–2* и *2–3* имеем

$$Q_{12} = \nu \cdot \frac{3}{2} R \left(T_2 - T_3\right) + A_{12},$$

$$Q_{23} = \nu \cdot \frac{3}{2} R \left(T_3 - T_2\right) + A_{23}.$$

Из записанных уравнений находим количество теплоты, подведенное к газу в процессе *1–2*:

$$Q_{12} = A_{12} - \frac{3}{4} Q_{23} = 100 \text{ Дж}.$$

Молярная теплоемкость в процессе *1–2* равна

$$C = \frac{Q_{12}}{\nu\left(T_2 - T_3\right)} = \frac{3}{2} R - \frac{2A_{12}}{Q_{23}} R = -\frac{R}{2}.$$

4. Пусть ключ замкнут на время τ. При замкнутом ключе через резистор течет постоянный ток $I_R = \mathcal{E}/R$, а ток через катушку нарастает по линейному закону от нуля до $I_0 = \mathcal{E}\tau/L$, поскольку $\mathcal{E} - LI_L' = 0$, а значит, производная по времени тока через катушку $I_L' = \mathcal{E}/L = \text{const}$. За время τ в катушке запасется энергия

$$W_L = \frac{1}{2} L I_0^2 = \frac{\mathcal{E}^2 \tau^2}{2L},$$

которая и выделится в виде тепла в резисторе после размыкания ключа. При замкнутом ключе в резисторе выделится количество теплоты

$$Q_R = I_R^2 R \tau = \frac{\mathcal{E}^2}{R} \tau .$$

Из условия $W_L = 2Q_R$ находим $\tau = 4L/R$. Прошедший через источник заряд при замкнутом ключе равен сумме зарядов, прошедших через резистор и катушку:

$$q_{\mathcal{E}} = I_R \tau + \frac{1}{2} I_0 \tau = 12 \frac{\mathcal{E} L}{R^2}.$$

Теперь найдем связь между протекшим через резистор зарядом q_R и изменением тока в катушке после размыкания ключа. Пусть в некоторый момент после размыкания ключа ток через катушку (и резистор) равен I. За сколь угодно малое время Δt этот ток изменится на ΔI. Для контура из катушки и резистора справедливо равенство

$$-L\frac{\Delta I}{\Delta t} = IR\text{, или } -L\Delta I = RI\Delta t.$$

Поскольку $I\Delta t = \Delta q$ есть заряд, прошедший через резистор за время Δt, то

$$-L\Delta I = R\Delta q.$$

Просуммируем равенства, аналогичные последнему, для всех интервалов времени после размыкания ключа:

$$-L\sum\Delta I = R\sum\Delta q.$$

Поскольку $\sum\Delta I = 0 - I_0$ и $\sum\Delta q = q_R$, то

$$LI_0 = Rq_R.$$

Итак,

$$q_R = \frac{LI_0}{R} = \frac{L}{R}\frac{\mathcal{E}}{L}\tau = \frac{4\mathcal{E}L}{R^2}.$$

Искомое отношение зарядов равно

$$\frac{q_{\mathcal{E}}}{q_R} = 3.$$

Заметим, что ответ можно получить быстрее, показав и использовав то, что прошедший через резистор заряд при замкнутом и разомкнутом ключе один и тот же.

5. Перебрав все возможные случаи, приходим к выводу, что линза собирающая и предмет в обоих опытах находится между фокусом и линзой. Пусть d – начальное расстояние от линзы до предмета, f_1 и f_2 – начальное и конечное расстояния (по модулю) между линзой и изображением, Γ – начальное увеличение, F – фокусное расстояние линзы. Тогда

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{-f_1} = \frac{1}{F},\ \Gamma = \frac{f_1}{d},$$

$$\frac{1}{2d} + \frac{1}{-f_2} = \frac{1}{F},\ 2\Gamma = \frac{f_2}{2d}.$$

Из записанных уравнений находим

$$\Gamma = \frac{3}{2}.$$

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФИЗИКА

Вариант 1

1. При искомом максимальном угле α_m сила трения, действующая на нижний брусок, равна

$$F_{тр} = \mu m_1 g \cos\alpha_m .$$

Равновесие всех сил, действующих на систему двух грузиков, в проекции на наклонную плоскость означает равенство

$$F_{тр} - (m_1 + m_2) g \sin\alpha_m = 0 ,$$

или

$$\mu m_1 g \cos\alpha_m = (m_1 + m_2) g \sin\alpha_m .$$

Отсюда находим

$$\alpha_m = \operatorname{arctg}\frac{\mu m_1}{m_1 + m_2} .$$

При $m_2 = 0$ получаем привычный результат $\alpha_m = \operatorname{arctg}\mu$.

2. Потребляемая электродвигателем мощность постоянна, т.е.

$$I_1 U_1 = I_2 U_2 .$$

Мощность, рассеиваемая на подводящих проводах сопротивлением $R,$ равна

$$P = I^2 R .$$

Поэтому

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{I_2^2}{I_1^2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{121}{361} \approx \frac{1}{3} .$$

Мощность, рассеиваемая на подводящих проводах, уменьшится в 3 раза.

3. Так как колбу нагревают медленно и поршень двигается без трения, расширение воздуха происходит при постоянном давлении (изобарически). Поэтому отношение температур воздуха в начальный момент и в момент выдавливания поршня равно отношению объемов, занимаемых воздухом в эти моменты:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{\pi D^2 h}{4V} .$$

4. При движении перемычки со скоростью v в контуре возникает эдс индукции

$$\mathcal{E}_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -Blv\cos\alpha ,$$

где Φ – магнитный поток, l – длина перемычки. Сила Ампера, действующая на перемычку, по модулю равна

$$F_{\text{А}} = IBl$$

и направлена перпендикулярно перемычке под углом α к скорости, а ток в цепи равен

$$I = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_i}{R} .$$

Равномерное движение перемычки достигается при уравновешивании действующих на нее сил (это сила Ампера, сила тяжести, сила реакции опоры и сила трения). В проекции на вертикальную плоскость это равенство дает

$$N = mg - F_{\text{А}}\sin\alpha ,$$

а в проекции на плоскость рельсов –

$$F_{\text{А}}\cos\alpha = \mu N = \mu\left(mg - F_{\text{А}}\sin\alpha\right) .$$

Из полученных уравнений находим ответ:

$$v = \frac{1}{Bl\cos\alpha}\left(\mathcal{E} - \frac{\mu mgR}{Bl\left(\cos\alpha + \mu\sin\alpha\right)}\right).$$

Отметим, что выражение в скобках больше нуля, так как в начальный момент времени (когда $\mathcal{E}_i = 0$) проекция силы Ампера на плоскость рельсов $\frac{\mathcal{E}}{R}Bl\cos\alpha$ должна быть больше силы трения $\mu\left(mg - \frac{\mathcal{E}}{R}Bl\sin\alpha\right)$, чтобы, как указано в условии задачи, перемычка начала движение.

5. Один моль воздуха при нормальных условиях занимает объем $V_{\text{возд}}$ = 22,4 л. Один моль воды имеет массу $m_{\text{воды}}$ = = 18 г и занимает объем $V_{\text{воды}} = m_{\text{воды}}/\rho_{\text{воды}} = 18\,\text{г}\big/\left(10^{-3}\,\text{г/л}\right) =$ $= 18\cdot 10^{-3}\,\text{л}$. Поскольку занимаемый объем V пропорционален кубу среднего расстояния a между молекулами, т.е. $V \sim a^3$, получаем

$$\frac{a_{\text{возд}}}{a_{\text{воды}}} = \sqrt[3]{\frac{V_{\text{возд}}}{V_{\text{воды}}}} = \sqrt[3]{\frac{22,4}{18\cdot 10^{-3}}} \approx 10 .$$

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА ИМЕНИ И.М.ГУБКИНА

ФИЗИКА

Ответы

	B1	**B2**	**B3**	**B4**	**B5**	**B6**
Вариант 1	50 км/ч	2 кг	4,4 м/с	34 Дж	2880 т	640 К
Вариант 2	5 км/ч	6 кг	1,2 м/с	12 Дж	500 см^3	2 кг/моль

	B7	**B8**	**B9**	**B10**	**B11**	**B12**
Вариант 1	60 кг	2	14 А	5 В	7 м/с^2	13
Вариант 2	4	2	90 Ом	30	0,11 м	80%

	C1	**C2**	**C3**	**C4**
Вариант 1	0,6 м	160 Н	3	8 см
Вариант 2	20 м/с	14 Н	2	12 см

Избранные решения

Вариант 1

C1. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси x и y (рис.20):

$$F_{\text{упр}} \sin\alpha = m\omega^2 l \sin\alpha,$$

$$F_{\text{упр}} \cos\alpha - mg = 0.$$

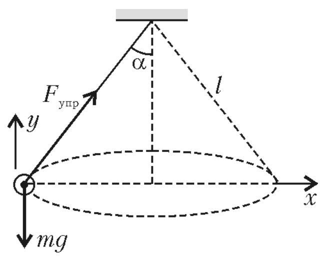


Рис. 20

Отсюда получаем

$$F_{\text{упр}} = \frac{mg}{\cos\alpha}, \quad l = \frac{g}{\omega^2 \cos\alpha}.$$

Деформация шнура равна

$$l - l_0 = x = \frac{F_{\text{упр}}}{k} = \frac{mg}{k\cos\alpha},$$

откуда находим длину нерастянутого шнура:

$$l_0 = l - x = \frac{g}{\cos\alpha}\left(\frac{1}{\omega^2} - \frac{m}{k}\right) = 0{,}6 \text{ м}.$$

C2. Уравнение моментов для левой половины лестницы относительно верхней точки A (рис.21) имеет вид

$$N_1 \frac{l}{2} - TH = 0.$$

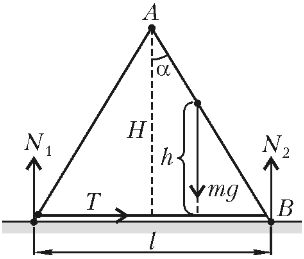


Рис. 21

Чтобы найти силу реакции N_1, запишем правило моментов для всей лестницы относительно правой опоры B:

$$N_1 l - mgh\,\mathrm{tg}\alpha = 0\text{, где } \mathrm{tg}\alpha = \frac{l}{2H}.$$

Окончательно получаем

$$T = mg\frac{hl}{4H^2} = 160 \text{ Н}.$$

С3. Пусть вначале емкость каждого конденсатора равна C, напряжение на каждом из них равно $U_1 = U_2 = \mathscr{E}/2$. После сближения пластин первого конденсатора его емкость стала $5C$, а напряжение на нем можно найти из условия равенства зарядов:

$$5CU_1' = \frac{C \cdot 5C}{C + 5C}\mathscr{E}\text{, и } U_1' = \frac{\mathscr{E}}{6}.$$

Получаем

$$\frac{U_1}{U_1'} = 3.$$

Вариант 2

С1. При достижении велосипедистом максимальной скорости начинается проскальзывание колес наружу, т.е. сила трения направлена внутрь (рис.22). Проекции второго закона Ньютона на оси x и y, направленные горизонтально к центру окружности и вертикально вверх, имеют вид

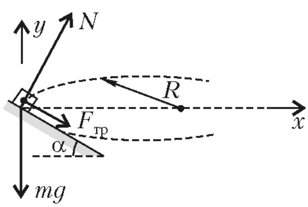


Рис. 22

$$N\sin\alpha + F_{\text{тр}}\cos\alpha = m\frac{v^2}{R},$$

$$N\cos\alpha - F_{\text{тр}}\sin\alpha - mg = 0.$$

В момент начала проскальзывания сила трения покоя достигает максимального значения $F_{\text{тр}} = \mu N$. Подставив это выражение в уравнения закона Ньютона и исключив N, получим

$$v = \sqrt{gR\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}} = \sqrt{gR\frac{\mathrm{tg}\alpha + \mu}{1 - \mu\,\mathrm{tg}\alpha}} = 20 \text{ м/с}.$$

С2. Уравнение моментов относительно точки A касания шара с плоскостью (рис.23) имеет вид

$$Tl\sin\alpha - mgR\sin\alpha = 0$$

(мы учли, что касательные имеют одинаковую длину, т.е. $OA = l$). Получаем

$$T = mg\frac{R}{l} = 14\ \text{Н}.$$

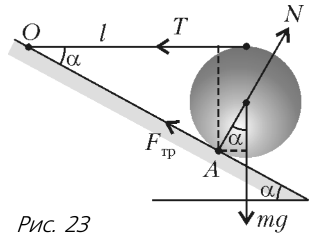


Рис. 23

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. −3. **2.** 7. **3.** 2. **4.** $\{2;\,3\}$. **5.** $[-2;\,2]$. **6.** $1/3$. **7.** $(-1)^k\,\pi/6 + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **8.** $[-1;\,1/2)$. **9.** 2. **10.** 0; $\log_2 3$. **11.** $[0;1)\cup(1;2]$. **12.** $y = -x^2 + 4x - 2$. **13.** $[0;1)$. **14.** $[0;1)$. **15.** 16. **16.** $1/2$. **17.** $\{\pm 6\}$. **18.** $\{7/2\,;25/2\}$. **19.** $15\sqrt{3}$. **20.** $(-\infty;-1]$.

Вариант 2

1. 1. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 2. **5.** $[2;+\infty)$. **6.** $\sqrt{3}/2$. **7.** $(-1)^k\,\pi/6 + k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **8.** $1/2$. **9.** 2. **10.** 0; 5. **11.** $(1;2]$. **12.** $y = 2 - x^2$. **13.** $[1;2)$. **14.** $[0;1)$. **15.** 529. **16.** 2. **17.** $\{\pm 2\}$. **18.** 13. **19.** 2. **20.** $(-\infty;-1]$.

ФИЗИКА

Региональная олимпиада школьников Санкт-Петербурга для профессионально-ориентированной молодежи

Заключительный тур

Вариант 1

1. $L = \dfrac{2nv^2}{a}$. **2.** $v_1 = \sqrt{\dfrac{k}{6m}}L$, $v_2 = \sqrt{\dfrac{k}{24m}}L$.

3. $m_{\text{г}} = \dfrac{m(\cos\alpha - \sin\alpha)}{4\sin\alpha} = 0{,}18m$. **4.** $x_m = 2\Delta x = 0{,}4$ см.

5. $p_0 = \dfrac{T_0V_1}{T_1V_0}p_1$.

6. $E=\sqrt{2\left(\frac{kq}{a^2}\right)^2+\left(\frac{kq}{2a^2}\right)^2}=1{,}5\frac{kq}{a^2}$. **7.** $P_6=\frac{U^2}{R_6}=24$ Вт.

8. $\alpha=\arccos\frac{mg}{\omega(m\omega\pm qB)l}$. **9.** $q_к=\frac{8}{16}\frac{B\pi R^2}{r}=\frac{1}{2}q$.

10. Изображение мнимое, увеличенное в 3 раза.

Комплексная олимпиада

МАТЕМАТИКА

1. 2. **2.** −1. **3.** $\{(-2;-5)\}$. **4.** $[-1;0]\cup\{1\}$.
5. 3π. **6.** $[-1;\ 0]$. **7.** $(1;2)\cup(2;3]$. **8.** $(-\infty;-2]\cup\{0\}$.

ФИЗИКА

1. $v_0=\frac{1}{2}g\Delta t=10$ м/с. **2.** $F=mg\sqrt{1-2\frac{v^2}{gR}\cos\alpha+\frac{v^4}{g^2R^2}}$.

3. $A_{\min}=mgH\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)$.

4. $\rho=\frac{p}{RT}\frac{(N+1)M_кM_в}{M_к+NM_в}\approx0{,}48$ кг/м^3.

5. $T=2\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mL^3}{qQ}}$. **6.** $U=\frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_{кр}}\right)\approx1{,}24$ В.

ИНФОРМАТИКА

1. 1242.
2. См. рис.24.
3. 28.
4.

```
i:=1; k:=n;
 while i<k do
  begin
  if a[i]=0 then
   begin
     temp:=a[i]; a[i]:=a[k]; a[k]:= temp; k:=k−1;
   end;
  if a[i]<>0 then i:=i+1;
end;
```

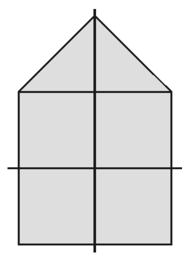


Рис. 24

5. Алгоритм вычисляет массив из десяти значений, каждое из которых является средним арифметическим положительных значений, выбираемых из очередной сотни элементов заданного одномерного массива.

6.

```
zn:=2*(2*n+1);
while n>1 do
  begin
    zn:= 2*(2*n−1) + x*x/zn;
    n:=n−1;
  end;
y:=1/(1−2*x/(2+x+x*x/zn));
```

Приложение к журналу «Квант+» №6/2010

Экзаменационные материалы по математике и физике 2010 года

Составители *С.А.Дориченко, А.А.Егоров, В.А.Тихомирова*

Редакторы *А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова*
Обложка *А.Е.Пацхверия*
Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*
Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

ИБ № 109

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская
Печать офсетная. Объем 6 печ.л. Тираж 3000 экз.
Заказ №

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант+»
Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvantjournal.ru, phys@kvantjournal.ru

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ КНИГИ СЕРИИ «БИБЛИОТЕЧКА «КВАНТ»

1. *М.П.Бронштейн*. Атомы и электроны
2. *М.Фарадей*. История свечи
3. *О.Оре*. Приглашение в теорию чисел
4. Опыты в домашней лаборатории
5. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов*. Задачи по физике
6. *Л.П.Мочалов*. Головоломки
7. *П.С.Александров.* Введение в теорию групп
8. *В.Г.Штейнгауз*. Математический калейдоскоп
9. Замечательные ученые
10. *В.М.Глушков*, *В.Я.Валах*. Что такое ОГАС?
11. *Г.И.Копылов*. Всего лишь кинематика
12. *Я.А.Смородинский*. Температура
13. *А.Е.Карпов*, *Е.Я.Гик*. Шахматный калейдоскоп
14. *С.Г.Гиндикин*. Рассказы о физиках и математиках
15. *А.А.Боровой*. Как регистрируют частицы
16. *М.И.Каганов*, *В.М.Цукерник*. Природа магнетизма
17. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: планиметрия
18. *Л.В.Тарасов*, *А.Н.Тарасова*. Беседы о преломлении света
19. *А.Л.Эфрос*. Физика и геометрия беспорядка
20. *С.А.Пикин*, *Л.М.Блинов*. Жидкие кристаллы
21. *В.Г.Болтянский*, *В.А.Ефремович*. Наглядная топология
22. *М.И.Башмаков*, *Б.М.Беккер*, *В.М.Гольховой*. Задачи по математике: алгебра и анализ
23. *А.Н.Колмогоров*, *И.Г.Журбенко*, *А.В.Прохоров*. Введение в теорию вероятностей
24. *Е.Я.Гик*. Шахматы и математика
25. *М.Д.Франк-Каменецкий*. Самая главная молекула
26. *В.С.Эдельман*. Вблизи абсолютного нуля
27. *С.Р.Филонович*. Самая большая скорость
28. *Б.С.Бокштейн*. Атомы блуждают по кристаллу
29. *А.В.Бялко*. Наша планета – Земля
30. *М.Н.Аршинов*, *Л.Е.Садовский*. Коды и математика
31. *И.Ф.Шарыгин*. Задачи по геометрии: стереометрия
32. *В.А.Займовский*, *Т.Л.Колупаева*. Необычные свойства обычных металлов
33. *М.Е.Левинштейн*, *Г.С.Симин*. Знакомство с полупроводниками
34. *В.Н.Дубровский*, *Я.А.Смородинский*, *Е.Л.Сурков*. Релятивистский мир
35. *А.А.Михайлов*. Земля и ее вращение
36. *А.П.Пурмаль*, *Е.М.Слободецкая*, *С.О.Травин*. Как превращаются вещества
37. *Г.С.Воронов*. Штурм термоядерной крепости
38. *А.Д.Чернин*. Звезды и физика
39. *В.Б.Брагинский*, *А.Г.Полнарев*. Удивительная гравитация
40. *С.С.Хилькевич*. Физика вокруг нас

41. *Г.А.Звенигородский*. Первые уроки программирования
42. *Л.В.Тарасов*. Лазеры: действительность и надежды
43. *О.Ф.Кабардин*, *В.А.Орлов*. Международные физические олимпиады школьников
44. *Л.Е.Садовский*, *А.Л.Садовский*. Математика и спорт
45. *Л.Б.Окунь*. $\alpha, \beta, \gamma \ldots Z$: элементарное введение в физику элементарных частиц
46. *Я.Е.Гегузин*. Пузыри
47. *Л.С.Марочник*. Свидание с кометой
48. *А.Т.Филиппов*. Многоликий солитон
49. *К.Ю.Богданов*. Физик в гостях у биолога
50. Занимательно о физике и математике
51. *Х.Рачлис*. Физика в ванне
52. *В.М.Липунов*. В мире двойных звезд
53. *И.К.Кикоин*. Рассказы о физике и физиках
54. *Л.С.Понтрягин*. Обобщения чисел
55. *И.Д.Данилов*. Секреты программируемого микрокалькулятора
56. *В.М.Тихомиров*. Рассказы о максимумах и минимумах
57. *А.А.Силин*. Трение и мы
58. *Л.А.Ашкинази*. Вакуум для науки и техники
59. *А.Д.Чернин*. Физика времени
60. Задачи московских физических олимпиад
61. *М.Б.Балк*, *В.Г.Болтянский*. Геометрия масс
62. *Р.Фейнман*. Характер физических законов
63. *Л.Г.Асламазов*, *А.А.Варламов*. Удивительная физика
64. *А.Н.Колмогоров*. Математика – наука и профессия
65. *М.Е.Левинштейн*, *Г.С.Симин*. Барьеры: от кристалла до интегральной схемы
66. *Р.Фейнман*. КЭД – странная теория света и вещества
67. *Я.Б.Зельдович*, *М.Ю.Хлопов*. Драма идей в познании природы
68. *И.Д.Новиков*. Как взорвалась Вселенная
69. *М.Б.Беркинблит*, *Е.Г.Глаголева*. Электричество в живых организмах
70. *А.Л.Стасенко*. Физика полета
71. *А.С.Штейнберг*. Репортаж из мира сплавов
72. *В.Р.Полищук*. Как исследуют вещества
73. *Л.Кэрролл*. Логическая игра
74. *А.Ю.Гросберг*, *А.Р.Хохлов*. Физика в мире полимеров
75. *А.Б.Мигдал*. Квантовая физика для больших и маленьких
76. *В.С.Гетман*. Внуки Солнца
77. *Г.А.Гальперин*, *А.Н.Земляков*. Математические бильярды
78. *В.Е.Белонучкин*. Кеплер, Ньютон и все-все-все...
79. *С.Р.Филонович*. Судьба классического закона
80. *М.П.Бронштейн*. Солнечное вещество
81. *А.И.Буздин*, *А.Р.Зильберман*, *С.С.Кротов*. Раз задача, два задача...
82. *Я.И.Перельман*. Знаете ли вы физику?
83. *Р.Хонсбергер*. Математические изюминки
84. *Ю.Р.Носов*. Дебют оптоэлектроники

85. *Г.Гамов.* Приключения мистера Томпкинса
86. *И.Ш.Слободецкий, Л.Г.Асламазов.* Задачи по физике (2-е изд.)
87. Физика и...
88. *А.В.Спивак.* Математический праздник
89. *Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий.* Задачи и не только по физике
90. *П.Гнэдиг, Д.Хоньек, К.Райли.* Двести интригующих физических задач
91. *А.Л.Стасенко.* Физические основы полета
92. Задачник «Кванта». Математика. Часть 1
93. Математические турниры имени А.П.Савина
94. *В.И.Белотелов, А.К.Звездин.* Фотонные кристаллы и другие метаматериалы
95. Задачник «Кванта». Математика. Часть 2
96. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Физика
97. *А.А.Егоров, Ж.М.Раббот.* Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика
98. *К.Ю.Богданов.* Прогулки с физикой
99. *П.В.Блиох.* Радиоволны на земле и в космосе
100. *Н.Б.Васильев, А.П.Савин, А.А.Егоров.* Избранные олимпиадные задачи. Математика
101. У истоков моей судьбы...
102. *А.В.Спивак.* Арифметика
103. *Я.А.Смородинский.* Температура (3-е изд.)
104. *А.Н.Васильев.* История науки в коллекции монет
105. *И.Ф.Акулич.* Королевские прогулки
106. Исаак Константинович Кикоин в жизни и в «Кванте»
107. *Г.С.Голицын.* Макро- и микромиры и гармония
108. *П.С.Александров.* Введение в теорию групп (2-е изд.)
109. *А.В.Спивак.* Арифметика-2
110. *П.Г.Крюков.* Лазер – новый источник света
111. *А.Б.Сосинский.* Узлы. Хронология одной математической теории
112. *А.П.Пятаков, П.П.Григал.* Лаборатория на коленке
113. *А.А.Заславский.* Олимпиады имени И.Ф.Шарыгина
114. *С.В.Коновалихин.* Сборник качественных задач по физике
115. *Е.Я.Гик.* Математика и шахматы
116. *Л.К.Белопухов.* Физика внезапного
117. *Н.Б.Васильев, А.А.Егоров.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1
118. Задачник «Кванта». Физика. Часть 1