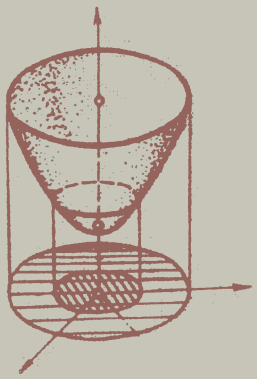
Ю. С. Богданов, Н. В. Пыжкова,
Л. П. Черенкова

НАЧАЛА АНАЛИЗА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В НАГЛЯДНОМ ИЗЛОЖЕНИИ



Ю.С. БОГДАНОВ, Н.В. ПЫЖКОВА,
Л.П. ЧЕРЕНКОВА

НАЧАЛА АНАЛИЗА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В НАГЛЯДНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Минск, "Вышэйшая школа

ББК 22.161я73
Б73
УДК 517.5

Рецензент: *Н.М. Матвеев*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Ленинградского государственного педагогического института им. А.И.Герцена

Богданов Ю.С. и др.

Б73 Начала анализа функций двух переменных в наглядном изложении / Ю.С. Богданов, Н.В. Пыжкова, Л.П. Черенкова. – Мн.: Выш. шк., 1987. – 176 с.: ил.

Книга содержит основные положения математического анализа функций двух переменных в их геометрической интерпретации, а также типовые примеры. Она поможет читателю образно представить основные понятия математического анализа.

Предназначена для студентов вузов и учащихся техникумов, изучающих математический анализ, а также для всех, интересующихся математикой.

Б $\frac{1702050000-061}{М304(03)-87}$ 24–87 ББК 22.161я73

© Издательство "Вышэйшая школа", 1987.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Реальные процессы протекают в пространстве и времени, т. е. зависят от нескольких основных атрибутов материи. Они определяются также другими ее свойствами (температурой, зарядом и т. д.). Величины, характеризующие свойства процессов, выражаются через различные параметры (переменные состояния, моменты времени и т. д.) и описываются функциями нескольких (более одного) аргументов. Анализ функций нескольких переменных связан с такими важными областями физики, как теория полей (стационарных и изменяющихся во времени), теория дифференциальных моделей математической физики и т. п. Эта часть анализа имеет первостепенное прикладное значение и лежит в основе анализа функций в абстрактных пространствах.

В конструктивном отношении анализ функций нескольких переменных значительно сложнее одномерного анализа (анализа функций одной переменной), как это показывают простейшие примеры. Действительно, типичными в качестве множества задания функций одной переменной являются промежутки (отрезки, интервалы, полуинтервалы), но уже в случае функции двух переменных естественные множества задания имеют самую разнообразную форму. Понятию производной функции одной переменной отвечают такие понятия, как частная производная, производная по направлению, градиент и т. д. Соответственно усложняются связи между основными аналитическими объектами. В смысловом отношении анализ функций нескольких переменных богаче, но и значительно сложнее одномерного анализа.

Как показывает опыт преподавания анализа функций нескольких переменных, основные методические трудности возникают из-за отсутствия адекватных графических средств построения графиков функций нескольких переменных. Уже построение графика функции двух переменных выводит в трехмерное пространство. Физически такие построения осуществимы, но практика показывает, что использование соответствующих моделей далеко не равноценно обычным эскизам и чертежам. Многообещающе применение дисплеев, но пока приходится ограничиваться обычными приемами сечений и проекций. Тот же прием сечений по существу используется и при табулировании функций двух переменных. Возможность применения описанных графических приемов при изучении функций двух переменных побуждает из чисто методических соображений выделить из общего курса анализа раздел, посвященный функциям двух аргументов.

Следует подчеркнуть, что выявление геометрических свойств функций двух переменных позволяет с помощью формальной экстраполяции, доведенной упражнениями до автоматизма, предугадать общие свойства функций нескольких переменных и оперировать ими.

Данное пособие задумано как продолжение книги А.А.Левакова, Н.В.Пыжковой, Л.П.Черенковой "Начала анализа в наглядном изложении" (Мн.: Выш. шк., 1982).

Создание наглядных пособий по анализу вызвано необходимостью изображать процессы развития с помощью статических средств. В книге использован метод переменного масштаба, позволяющий воспринимать в динамическом плане один и тот же объект, поданный в серии чертежей с разной степенью детализации. Этот метод эффективен при введении и осмысливании основных понятий дифференциального исчисления (приращение, дифференциал, частные производные).

Возрастающее значение математики, расширение области ее применения придает особую остроту вопросам "математической технологии", терминологии и символики. Унификация основных определений и обозначений – одно из требований,

предъявляемых к математике. Практика показывает, что использование простейших понятий теории множеств и математической логики позволяет придать изложению начал анализа компактность и четкость. В книге используются термины и символы, согласованные с материалом курса математики средней школы.

Авторы благодарят рецензента доктора физико-математических наук профессора Н.М.Матвеева за ценные советы и замечания, способствовавшие улучшению книги.

Все замечания и пожелания просим направлять по адресу: 220048. Минск, проспект Машерова, 11, издательство "Вышэйшая школа".

Авторы

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Логические операции:

$\Rightarrow$	влечет за собой
$\Leftarrow$	вытекает из
$\Leftrightarrow$	равносильно

Множества:

$\mathbf{N}$	натуральных чисел
$\mathbf{R}$	действительных чисел
$\mathbf{R}^2$	числовая плоскость
$\mathbf{R}^3$	трехмерное пространство
$\mathbf{R}^m$	m-мерное евклидово пространство
$\{x \mid P\}$	множество элементов x, удовлетворяющих условию P
$U_R(x_0, y_0)$	круговая окрестность точки (x_0, y_0)
$B(M_0, r)$	шар с центром в точке M_0 радиусом r
$\varnothing$	пустое множество

Действия над множествами:

$\cap$	пересечение
$\cup$	объединение
$\setminus$	разность

Промежутки:

$[a;\ b]$	отрезок
$]a;\ b[$	интервал

$[a;\ b[$	полуинтервал, открытый справа
$]a;\ b]$	полуинтервал, открытый слева

Операции над векторами:

AB	отрезок с концами A и B
$\vec{AB}$	направленный отрезок с началом A, концом B или связанный вектор
$\lvert AB \rvert$	длина отрезка AB
$\vec{a}$	вектор
$\vec{0}$	нулевой вектор
$\lvert \vec{a} \rvert = a$	длина вектора $\vec{a}$
(a_x, a_y, a_z)	вектор с координатами a_x, a_y и a_z
$\text{пр}_{\vec{a}}\, b$	проекция вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$	скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$
$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$	угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Знаки:

$\in$	принадлежит
$\subset$	включается
$\forall$	для любого
$\exists$	существует
$\{\ \}$	множество
$(\ )$	последовательность
$:=$	равно по определению
Σ	сумма
$n!$	факториал, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$
$\dfrac{\partial}{\partial x}$, $(\ )'_x$	частная производная по x

$\frac{\partial}{\partial y}$, $(\ )'_y$	частная производная по y
sup	точная верхняя грань
rank	ранг
const	постоянная
$[\alpha]$	целая часть действительного числа α
mes	мера
diam	диаметр
$k = \overline{1, m}$	индекс k пробегает натуральные значения от 1 до m
$o(\rho)$	бесконечно малая порядка выше ρ, $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$
C_n^k	число сочетаний из n элементов по k
Δf	приращение функции f
df	дифференциал функции f
$d(M_1, M_2)$	расстояние между точками M_1 и M_2
(x, y)	точка числовой плоскости
(x, y, z)	точка трехмерного пространства
(r, φ)	полярные координаты точки плоскости
$f(x, y)$	значение функции f в точке (x, y)
Γ_f	график функции f
(r, φ, z)	цилиндрические координаты точки пространства $\mathbf{R}^3$
(r, φ, θ)	сферические координаты точки пространства $\mathbf{R}^3$

1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ

1.1. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ НА ПЛОСКОСТИ

Криволинейные координаты. Для определения положения точки на плоскости $\mathbf{R}^2$ наряду с декартовой системой координат могут быть использованы *криволинейные координаты* ξ, η, принимающие некоторый вполне определенный геометрический смысл. Например, фигура, ограниченная кривыми $xy = a^2$; $xy = 2a^2$; $y = x$; $y = 2x\,(x > 0, y > 0)$, заданными уравнениями в декартовых ортогональных координатах (рис. 1.1), опишется гораздо удобнее, если ввести координаты ξ и η следующим образом: $\xi = xy$, $\eta = y/x$. Уравнения границы в системе координат ξ, η примут вид: $\xi = a^2$; $\xi = 2a^2$; $\eta = 1$; $\eta = 2$ (рис. 1.2).

Задание пары значений (ξ, η) однозначно определит некоторую точку (x, y) плоскости $\mathbf{R}^2$ и, обратно, каждой точке (x, y) плоскости $\mathbf{R}^2$ будет соответствовать единственная пара значений (ξ, η), если соотношения $\xi = \varphi(x, y)$; $\eta = \psi(x, y)$, связывающие криволинейные и декартовы координаты точки, однозначны и однозначно разрешимы относительно x и y.

Кривая, составленная из точек плоскости $\mathbf{R}^2$, у ко-

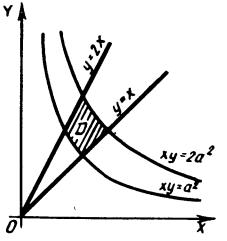


Рис. 1.1

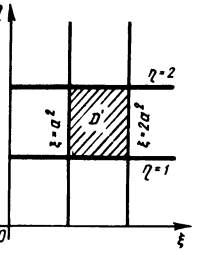


Рис. 1.2

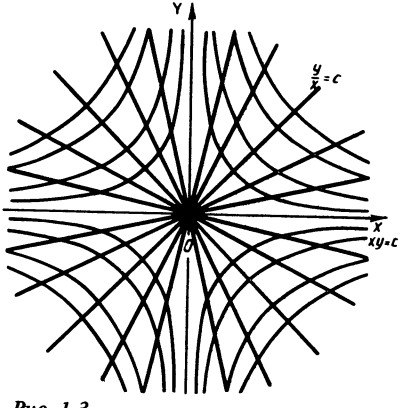


Рис. 1.3

торых одна из координат сохраняет постоянное значение, называется *координатной линией.*

Семейства координатных линий приведенной системы координат $\xi = c$, $c \in \mathbf{R}$, и $\eta = c$, $c \in \mathbf{R}$, т.е. $xy=$

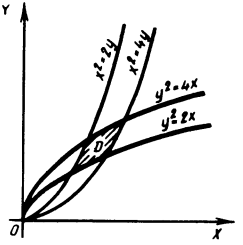


Рис. 1.4

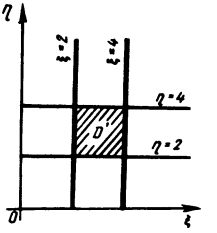


Рис. 1.5

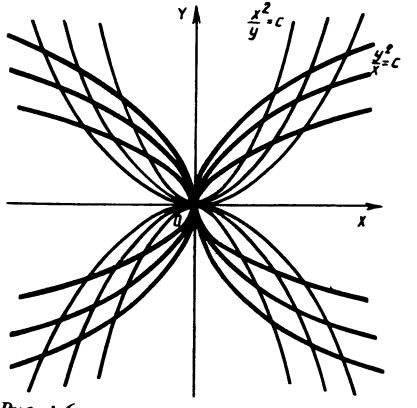


Рис. 1.6

$= c$; $y/x = c$ на плоскости Oxy, даны на рис. 1.3. Сетка координатных линий на плоскости $O\xi\eta$ является изображением сетки прямых $\xi = c$ и $\eta = c$.

Задача. Выбрав подходящим образом систему ко-

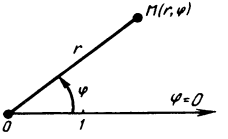


Рис. 1.7

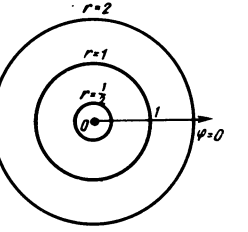


Рис. 1.8

ординат, описать фигуру D, ограниченную кривыми $y^2 = 2x$; $y^2 = 4x$; $x^2 = 2y$; $x^2 = 4y$ (рис. 1.4).

Р е ш е н и е. Введем координаты ξ и η, положив $\xi = y^2/x$; $\eta = x^2/y$. Уравнения кривых – граница области D – запишутся в виде: $\xi = 2$; $\xi = 4$; $\eta = 2$; $\eta = 4$ (рис. 1.5). Координаты любой точки фигуры удовлетворяют неравенствам $2 \leqslant \xi \leqslant 4$; $2 \leqslant \eta \leqslant 4$. Сетка координатных линий $x^2/y = c$, $c \in \mathbf{R}$, и $y^2/x = c$, $c \in \mathbf{R}$, на плоскости Oxy приведена на рис. 1.6.

Полярные координаты. *Положение любой точки M_1 на плоскости $\mathbf{R}^2$ вполне определяется расстоянием ее r; $r \geqslant 0$, от некоторой заданной точки плоскости O, называемой полюсом, и полярным углом φ, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, между заданным лучом, исходящим из полюса, называемым полярной осью, и радиусом-вектором OM_1* (рис. 1.7).

Полярный угол φ отсчитывается от полярной оси в

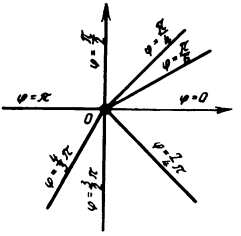


Рис. 1.9

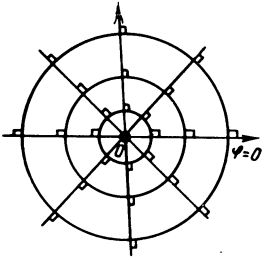


Рис. 1.10

положительном направлении. Полюс O имеет первой координатой 0, второй координате φ приписывается произвольное значение. Координаты r , φ называются *полярными координатами* точки плоскости.

Семейство координатных линий $r = c$, $c \geqslant 0$, представляет собой семейство окружностей с центром в полюсе O (рис. 1.8). Уравнения $\varphi = c$, $0 \leqslant c < 2\pi$, опишут семейство лучей, исходящих из полюса под углом c к полярной оси (рис. 1.9). Координатная сетка полярной системы координат *ортогональна* (рис. 1.10), т. е. касательные к координатным линиям пересекаются под прямым углом.

Приведем примеры множеств точек плоскости $\mathbf{R}^2$, заданных неравенствами:

$\{(r, \varphi) \mid r \geqslant 0;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/3\}$ – замкнутый угол (рис. 1.11), граничные лучи причисляются к замкнутому углу;

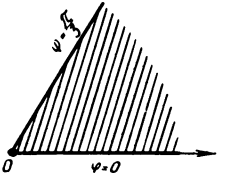


Рис. 1.11

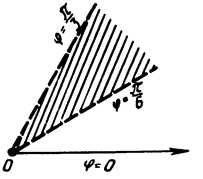


Рис. 1.12

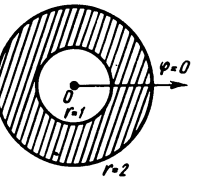


Рис. 1.13

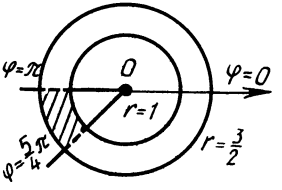


Рис. 1.14

$\{(r, \varphi) \mid r \geqslant 0;\ \pi/6 < \varphi < \pi/3\}$ – открытый угол (рис. 1.12), граничные лучи не входят в открытый угол;

$\{(r, \varphi) \mid 1 \leqslant r \leqslant 2;\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ – замкнутое кольцо (рис. 1.13);

$\{(r, \varphi) \mid 1 \leqslant r \leqslant \frac{3}{2};\ \pi < \varphi < \frac{5}{4}\pi\}$ – сектор кольца (рис. 1.14).

Связь между полярными r, φ *и декартовыми* x, y *координатами точки М задается равенствами* $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi$ (рис. 1.15).

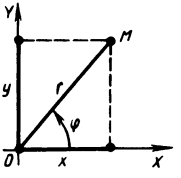


Рис. 1.15

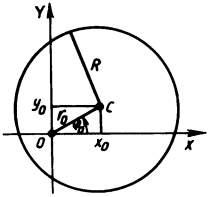


Рис. 1.16

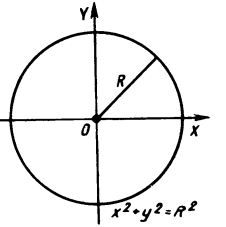


Рис. 1.17

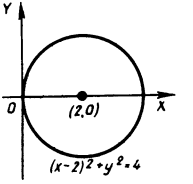


Рис. 1.18

Формулы, выражающие полярные координаты через декартовы, имеют вид:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2};\ \sin\varphi = y/\sqrt{x^2+y^2}.$$

Укажем уравнения некоторых линий.

Окружность радиусом R с центром в точке C, полярные координаты которой r_0, φ_0 (рис. 1.16), в декартовых координатах описывается уравнением

$$(x - r_0\cos\varphi_0)^2 + (y - r_0\sin\varphi_0)^2 = R^2 .$$

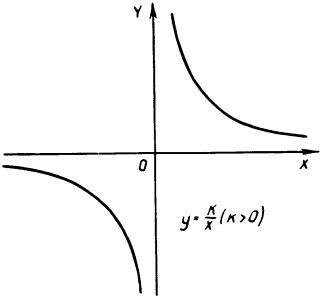


Рис. 1.19

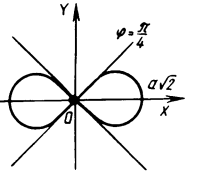


Рис. 1.20

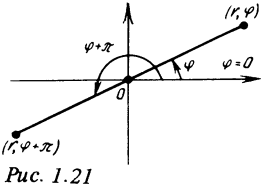


Рис. 1.21

В полярных координатах ее уравнение будет

$$r^2 - 2rr_0\cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2 - R^2 = 0.$$

Окружность радиусом R с центром в полюсе O *(рис. 1.17)* имеет полярное уравнение $r = R$.

Окружность с центром в точке (2, 0) радиусом 2 (рис. 1.18) в полярных координатах имеет уравнение $r = 4\cos\varphi$.

Гипербола $y = k/x$, $k > 0$, в полярных координа-

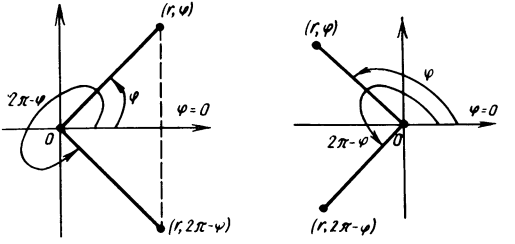


Рис. 1.22

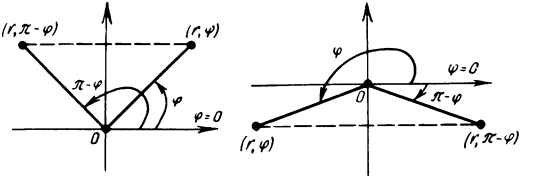


Рис. 1.23

тах имеет уравнение $r^2 \sin 2\varphi = 2k$ (рис. 1.19).

Лемниската Бернулли $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 (x^2 - y^2)$ (рис. 1.20) в полярных координатах описывается уравнением $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$.

Симметричность графика функции $r = f(\varphi)$.

1. Если $f(\varphi) = f(\varphi + \pi)$ $\forall \varphi \in [0, \pi[$, то график функции $r = f(\varphi)$ симметричен относительно полюса (рис 1.21).

2. Если $f(\varphi) = f(2\pi - \varphi)\ \forall \varphi \in [0, 2\pi[$, то график функции $r = f(\varphi)$ симметричен относительно прямой, проходящей через полярную ось (рис. 1.22).

3. Если $f(\varphi) = f(\pi - \varphi)\ \forall \varphi \in [0, 2\pi[$, то график функции $r = f(\varphi)$ симметричен относительно прямой, перпендикулярной к полярной оси (рис. 1.23). Заметим, что угол $\pi - \varphi$ в этом случае может принимать отрицательные значения.

ПРИМЕРЫ КРИВЫХ, ЗАДАННЫХ ПОЛЯРНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Уравнение $r = 2\cos\varphi$ есть полярное уравнение окружности с центром в точке (1; 0) радиусом 1. В декартовой системе координат уравнение принимает вид $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рис. 1.24).

Уравнение $r = 2\sin\varphi$ – полярное уравнение окружности с центром в точке (0, 1) радиусом 1. В декартовой системе координат уравнение принимает вид $x^2 + (y-1)^2 = 1$ (рис. 1.25).

Для построения кривой, задаваемой полярным уравнением $r = \cos n\varphi$, $n \in N$, используем графики функций $y = \cos x$ и $y = \cos nx$, заданных в декартовых координатах. Учитывая поведение функции $y = \cos nx$ при изменении аргумента на промежутке $[0, 2\pi/n]$, длина которого равна периоду $T = 2\pi/n$, получаем, что функция $r = \cos n\varphi$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi/n$ опишет кривую, изображенную на рис. 1.26. Построенный ри-

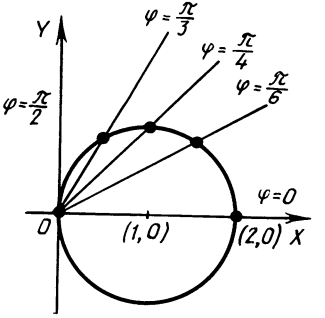


Рис. 1.24

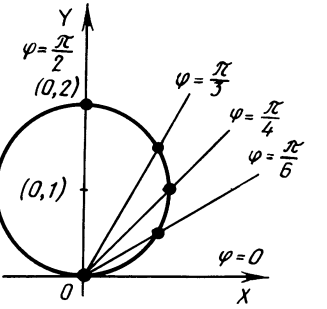


Рис. 1.25

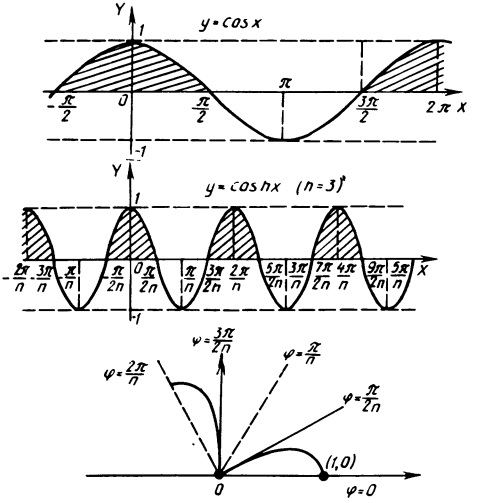


Рис. 1.26

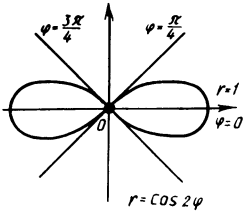


Рис. 1.27

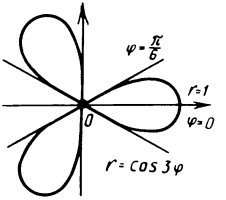


Рис. 1.28

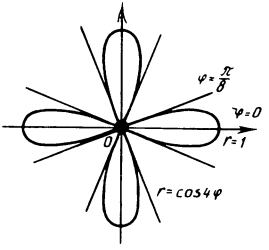


Рис. 1.29

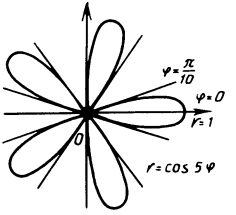


Рис. 1.30

сунок повторится n раз при φ, изменяющемся от 0 до 2π. В результате получается "роза", состоящая из n "лепестков".

Частные случаи

$r = \cos 2\varphi$ – двухлепестковая роза (рис. 1.27);
$r = \cos 3\varphi$ – трехлепестковая роза (рис. 1.28);
$r = \cos 4\varphi$ – четырехлепестковая роза (рис. 1.29);
$r = \cos 5\varphi$ – пятилепестковая роза (рис. 1.30).

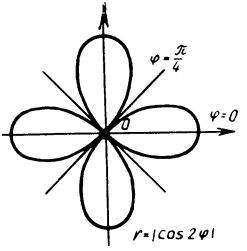


Рис. 1.31

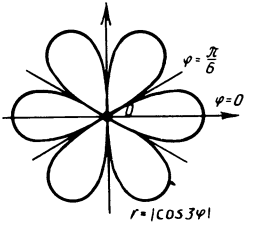


Рис. 1.32

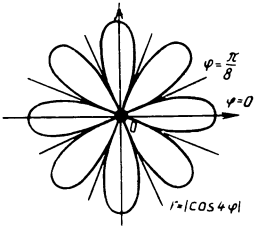


Рис. 1.33

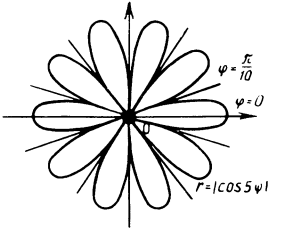


Рис. 1.34

Графики функций, заданных полярными уравнениями, содержащими знак модуля, приведены на рис. 1.31–1.34.

При построении графиков функций, заданных полярными уравнениями, обращает на себя внимание тот факт, что полярные координаты точки при описании плоскости могли изменяться в пределах $0 \leqslant r < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Условимся считать:

1) если r, φ – полярные координаты точки M, то

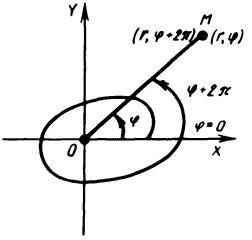


Рис. 1.35

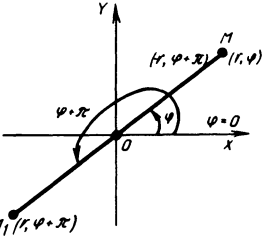
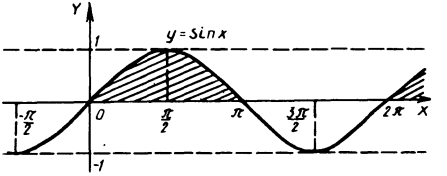


Рис. 1.36



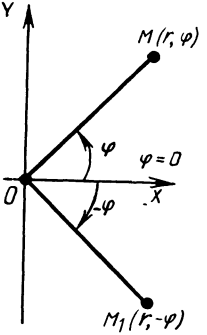


Рис. 1.37

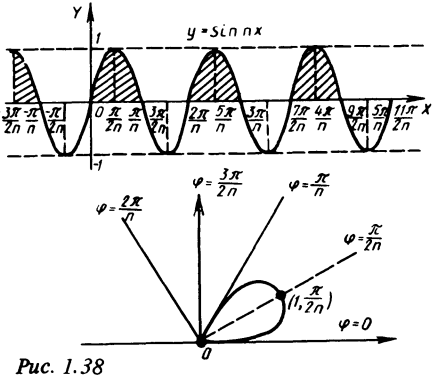


Рис. 1.38

и r, $\varphi + 2k\pi$, $k \in N$, – полярные координаты той же точки (рис. 1.35);

2) если r, φ – полярные координаты точки M, то и $-r$, $\varphi + \pi$ – полярные координаты той же точки (рис. 1.36);

3) придавая полярному углу φ отрицательные значения, отсчет угла будем вести от полярной оси в отрицательном направлении (по часовой стрелке), как показано на рис. 1.37.

В высказанных предположениях график функции $y = \cos n\varphi$, $n = 2k$, $k \in N$, будет иметь $2n$ лепестков. Так, функция $r = \cos 2\varphi$ опишет кривую, показанную на рис. 1.31, а $r = \cos 4\varphi$ – на рис. 1.33.

Функция $r = \sin n\varphi$, $n \in N$, имеет период $T = 2\pi/n$, основным промежутком изменения аргумента φ будет $[0, 2\pi/n]$. Учитывая поведение синуса при изменении аргумента на промежутке $[0, 2\pi/n]$, разделим угол, образованный лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi/n$, на четыре угла лучами $\varphi = \pi/(2n)$; $\varphi = \pi/n$; $\varphi = 3\pi/(2n)$. Так как значения синуса в случае принадлежности аргумента третьему и четвертому углам отрицательны, то кривая, описываемая уравнением $r = \sin n\varphi$, определена только в первом и втором из построенных углов, причем r возрастает в первом и убывает во втором с ростом φ, принимая значения от 0 до 1 (рис. 1.38). Построенный рисунок при $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ повторится n раз. В результате получится "роза", состоящая из n лепестков.

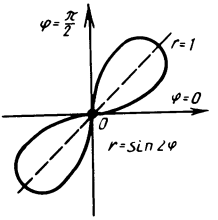


Рис. 1.39

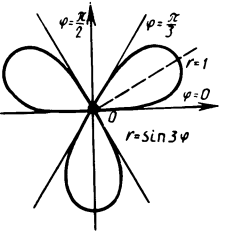


Рис. 1.40

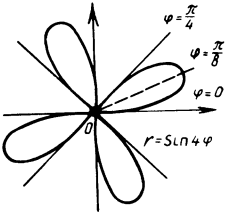


Рис. 1.41

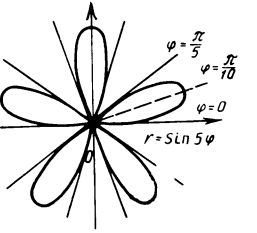


Рис. 1.42

Частные случаи

$r = \sin 2\varphi$ – двухлепестковая роза (рис. 1.39);
$r = \sin 3\varphi$ – трехлепестковая роза (рис. 1.40);
$r = \sin 4\varphi$ – четырехлепестковая роза (рис. 1.41);
$r = \sin 5\varphi$ – пятилепестковая роза (рис. 1.42).

Графики функций, полярные уравнения которых содержат знак модуля, приведены на рис. 1.43–1.46.

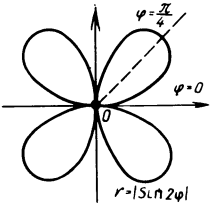


Рис. 1.43

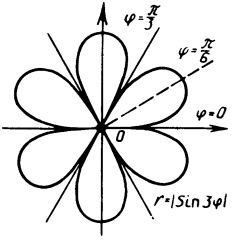


Рис. 1.44

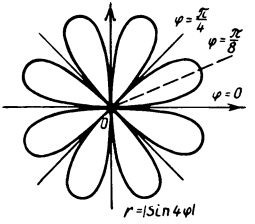


Рис. 1.45

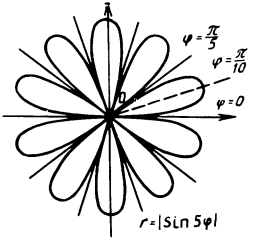


Рис. 1.46

Рассматривая общий случай полярных координат, т. е принимая во внимание точки с отрицательными координатами, график функции $r = \sin n\varphi$, $n = 2k, k \in N$, будет иметь $2n$ лепестков. Так, график функции $r = \sin 2\varphi$ изображен на рис. 1.43, а график функции $r = \sin 4\varphi$ – на рис. 1.45.

Графики функций $r = R\cos n\varphi$; $r = R\sin n\varphi$, $R > 0$, представляют собой "розы", длина лепестков которых

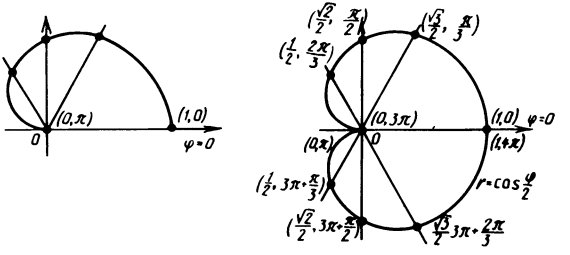


Рис. 1.47

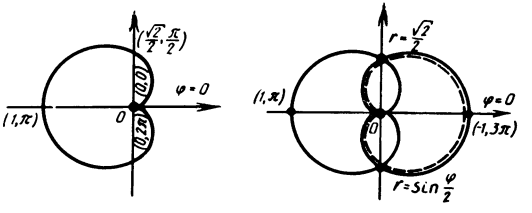


Рис. 1.48

определяется величиной R . Под длиной лепестка понимаем наибольшее отклонение точек кривой от полюса.

Графики функций $r = \cos\dfrac{\varphi}{2}$; $r = \sin\dfrac{\varphi}{2}$ приведены соответственно на рис. 1.47 и 1.48. При построении графиков с учетом $T = 4\pi$ аргументу φ даются значения от 0 до 4π. Правая половина кривой (рис. 1.48), выделенная пунктиром, получена при учете точек с отрицательной первой координатой.

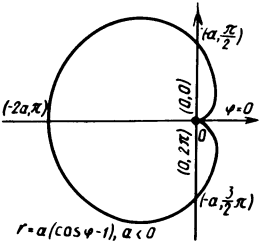


Рис. 1.49

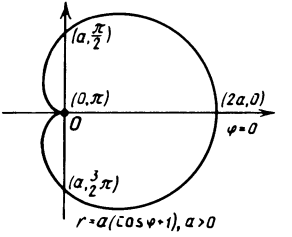


Рис. 1.50

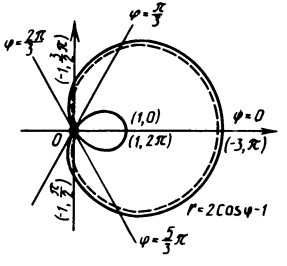


Рис. 1.51

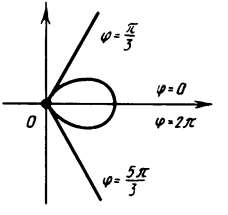


Рис. 1.52

Кардиоида, приведенная на рис. 1.49, задается полярным уравнением $r = a(\cos\varphi - 1)$, $a < 0$. На рис.1.50 изображена кардиоида, полярное уравнение которой $r = a(\cos\varphi + 1)$, $a > 0$.

Улитка Паскаля, уравнение которой $r = 2\cos\varphi - 1$, изображена на рис 1.51. Если не рассматривать точки с отрицательной первой координатой, то имеет смысл рассматривать значения аргумента φ лишь на множест-

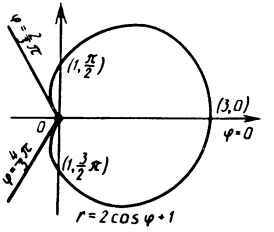


Рис. 1.53

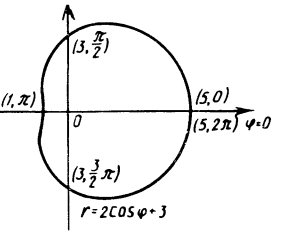


Рис. 1.54

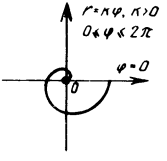


Рис. 1.55

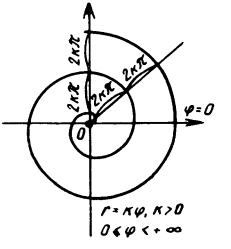


Рис. 1.56

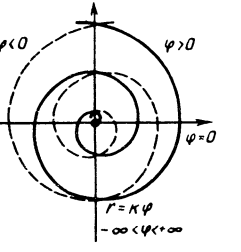


Рис. 1.57

ве $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$ (рис. 1.52). Обратим внимание на тот факт, что часть кривой, выделенная пунктиром на рис. 1.51, представляет собой график функции $r = 2\cos\varphi + 1$ (рис. 1.53). Улитка Паскаля, изображенная на рис. 1.54, задается уравнением $r = 2\cos\varphi + 3$.

Кривая, задаваемая уравнением $r = k\varphi$, $k > 0$, называется *спиралью Архимеда.* Она изображена на рис. 1.55. Если рассмотреть изменение φ на промежутке $[0,$

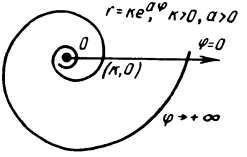
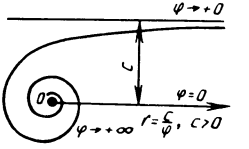


Рис. 1.58



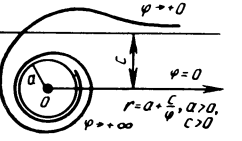


Рис. 1.59

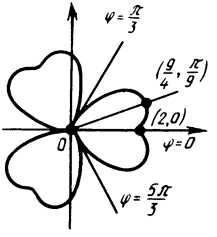


Рис. 1.60

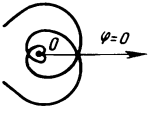


Рис. 1.61

$+\infty$ [, то спираль Архимеда, исходя из полюса O , делает бесконечно много витков (рис. 1.56). Иной вид будет иметь кривая, определяемая уравнением $r = k\varphi$ при изменении φ от $-\infty$ до $+\infty$ (рис 1.57). Символы $+\infty$, $-\infty$ читаются "плюс бесконечность", "минус бесконечность". Эти слова не являются наименованиями чисел. Они означают, что $|\varphi|$ может принимать сколь угодно большие значения.

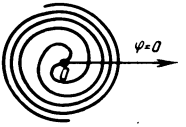


Рис. 1.62

Рис. 1.63

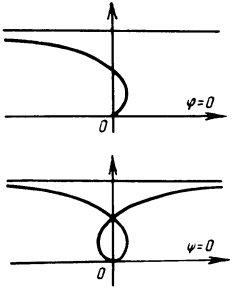


Рис. 1.64

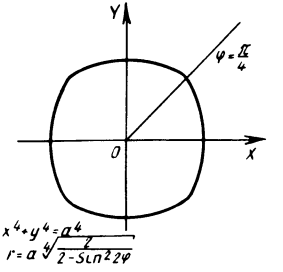


Рис. 1.65

Кривая, описываемая функцией $r = ke^{a\varphi}$, $k > 0$, $a > 0$, называется *логарифмической спиралью*. Меняя φ от 0 до $+\infty$, имеем бесконечно много оборотов около полюса, удаляющихся от него. Давая φ отрицательные значения, получаем витки спирали, приближающиеся к полюсу (рис. 1.58).

Гиперболические спирали $r = \frac{c}{\varphi}$, $c > 0$, и $r = a +$

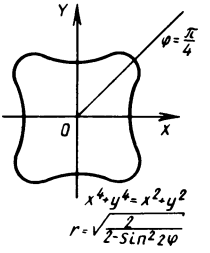


Рис. 1.66

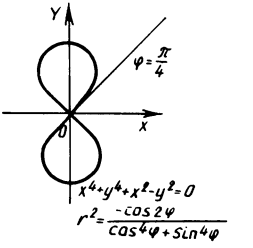


Рис. 1.67

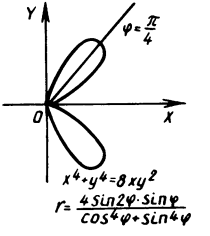


Рис. 1.68

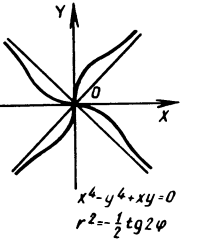


Рис. 1.69

$+\frac{c}{\varphi}$, $a > 0$, $c > 0$, даны на рис. 1.59.

На рис. 1.60 изображена кривая, называемая *трилистником.* Она задается уравнением $r = 1 + \cos 3\varphi + \sin^2 3\varphi$.

На рис. 1.61–1.63 даны соответственно *спираль Галилея* $r^2 = a^2\varphi^2$, $a \neq 0$; *спираль Ферма* $r^2 = a^2\varphi$, $a \neq 0$; *жезл* $r^2\varphi^2 = a^2$, $a \neq 0$.

На рис. 1.64 изображена кривая, уравнение кото-

рой $r = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. На верхнем рисунке не учтены точки с отрицательной координатой. Изменение второй координаты задается неравенством $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

На рис. 1.65–1.69 приведены кривые и уравнения, их задающие, в декартовых и полярных координатах.

1.2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

Цилиндрические координаты. Положение точки в пространстве $\mathbf{R}^3$ задается упорядоченной тройкой чисел. В частности, это могут быть декартовы координаты, определяющие расстояние от этой точки до трех взаимно перпендикулярных плоскостей, называемых *координатными плоскостями* (рис. 1.70). Наиболее употребляемыми в $\mathbf{R}^3$ криволинейными координатами являются *цилиндрические* и *сферические координаты.*

В цилиндрической системе координат положение точки M в пространстве определяется тройкой чисел ρ, φ, z, где ρ, φ – *полярные координаты ортогональной проекции точки M на плоскость Oxy, а* z – *декартова координата точки M (рис. 1.71).*

Семейство координатных поверхностей $\rho = c$, $c \geqslant 0$, есть *семейство круговых цилиндров* (рис. 1.72), дающих название координатной системе. Два других семейства $\varphi = c$, $0 \leqslant c < 2\pi$ (рис. 1.73), и $z = c$, $c \in \mathbf{R}$ (рис. 1.74), являются соответственно *семействами полуплоскостей* и *плоскостей.*

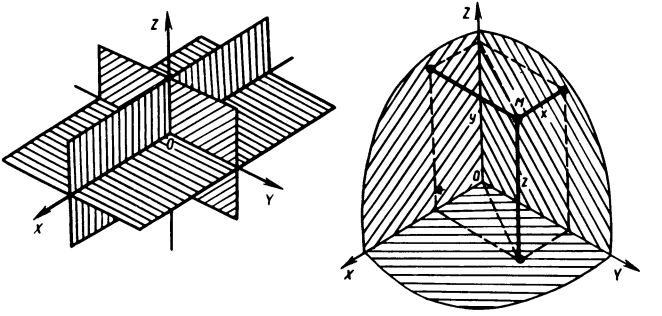


Рис. 1.70

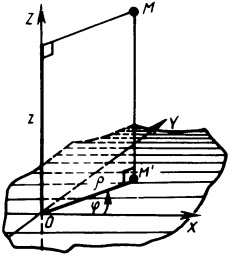


Рис. 1.71

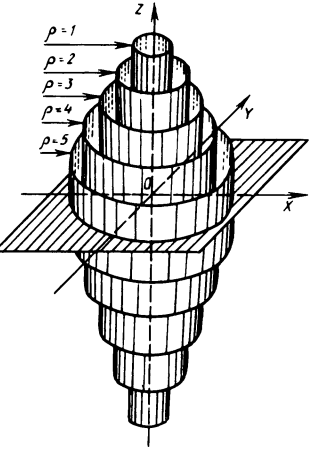


Рис. 1.72

2 Зак. 5346

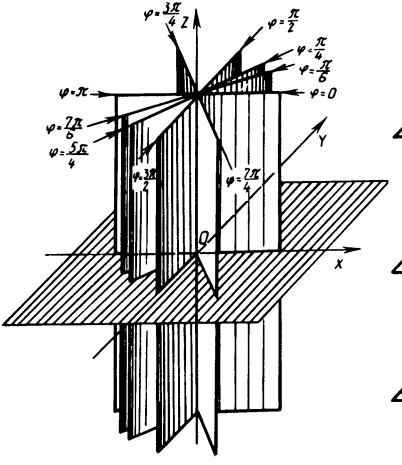


Рис. 1.73

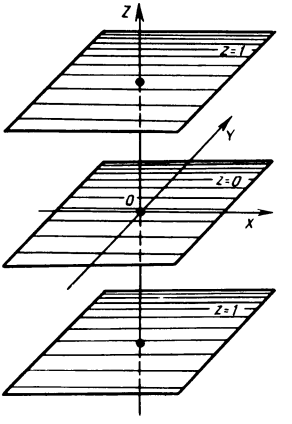
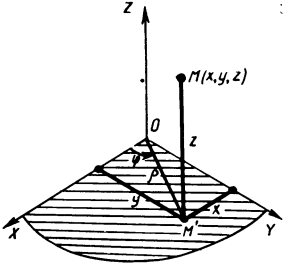


Рис. 1.74



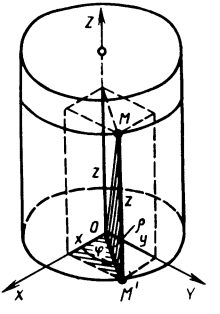


Рис. 1.75

Связь между цилиндрическими ρ, φ, z *и декартовыми координатами* x, y, z *точки* M *определяется формулами* (рис. 1.75):

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad z = z$$

или

$$x^2 + y^2 = \rho^2; \quad \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi;$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi; \quad z = z.$$

На рис. 1.76–1.79 приведены поверхности и их уравнения в цилиндрической системе координат. Уравнения этих поверхностей в декартовых координатах соответственно будут:

$$x^2 + y^2 = 3; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4; \quad x + 2y + z - 10 = 0;$$

$$x^2 + y^2 = pz \quad (p > 0).$$

Задача. Перейдя к цилиндрическим координатам, описать тело V, ограниченное поверхностями:

1. $z = x + y$; $z = xy$; $x + y = 1$; $x = 0$; $y = 0$ (рис. 1.80).

Уравнения поверхностей в цилиндрических координатах имеют вид:

$$z = \rho(\cos\varphi + \sin\varphi); \quad z = \frac{\rho^2}{2}\sin 2\varphi; \quad \rho(\cos\varphi + \sin\varphi) = 1;$$

$$\varphi = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

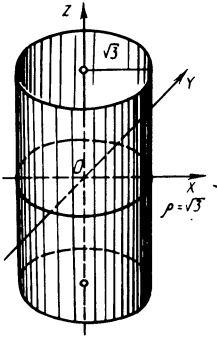


Рис. 1.76

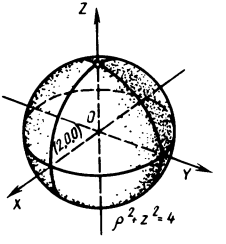


Рис. 1.77

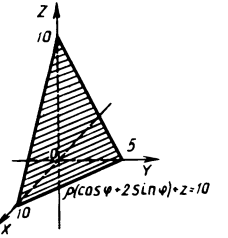


Рис. 1.78

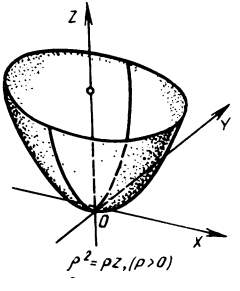


Рис. 1.79

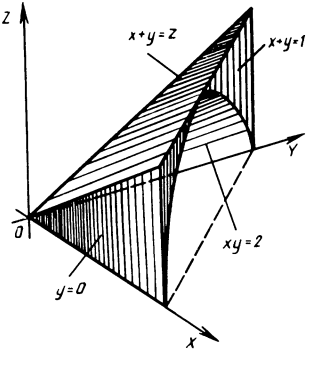


Рис. 1.80

$$V\left\{\begin{array}{l}0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\ ,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{\cos\varphi + \sin\varphi}\ ; \\ \frac{\rho^2}{2}\sin 2\varphi \leqslant z \leqslant \rho(\cos\varphi + \sin\varphi)\,.\end{array}\right\}$$

2. $z = 6 - x^2 - y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 1.81).

Уравнениями поверхностей в цилиндрических координатах являются: $z = 6 - \rho^2$; $z = \rho$.

$$V\ \left\{0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2,\ \rho \leqslant z \leqslant 6 - \rho^2\right\}\ .$$

3. $z = x^2 + y^2$; $z = -2$ (рис. 1.82).

Уравнения поверхностей в цилиндрических координатах имеют вид: $z^2 = \rho^2$; $z = -2$.

$$V\left\{0 \leqslant \varphi < 2\pi;\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2;\ -2 \leqslant z \leqslant \rho\right\}\ .$$

Сферические координаты. *В сферической системе координат точка M, декартовы координаты которой x, y, z, задается тройкой чисел* r, φ, θ, *где* r *– расстояние от точки M до начала координат O*; φ *– полярный угол, определяемый так же, как и в цилиндрической системе координат*; θ *– угол между лучом OM и плоскостью Oxy* (рис. 1.83).

Семейство координатных поверхностей $r = c$, $c \geqslant 0$, есть *семейство сфер* с центром в точке O (рис. 1.84). Координатные поверхности $\varphi = c$, $0 \leqslant c < 2\pi$, так же, как и в цилиндрической системе координат, представляют собой *полуплоскости*, проходящие через ось Oz (см. рис. 1.73). Семейство $\theta = c$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant c \leqslant$

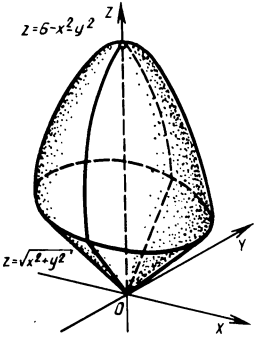


Рис. 1.81

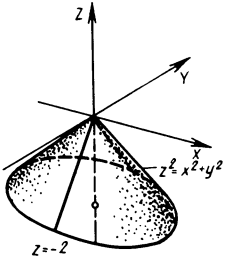


Рис. 1.82

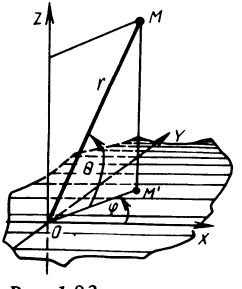


Рис. 1.83

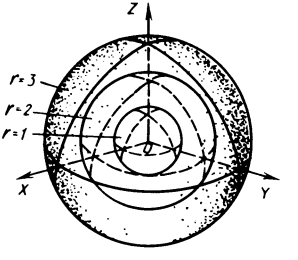


Рис. 1.84

$\leqslant \frac{\pi}{2}$, представляет собой *семейство круговых конусов*, оси которых совпадают с осью Oz (рис. 1.85). $\theta = 0$ определяет плоскость Oxy, а $\theta = \pi/2$ — положительную полуось Oz.

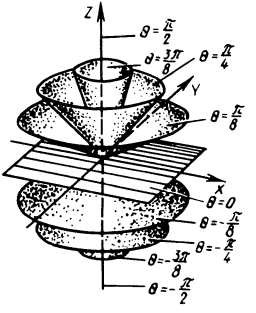


Рис. 1.85

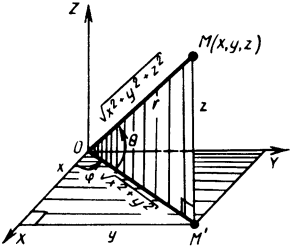


Рис. 1.86

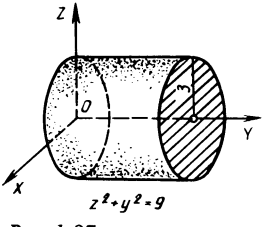


Рис. 1.87

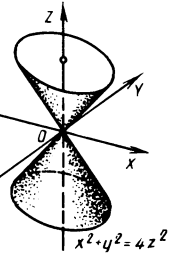


Рис. 1.88

Связь между декартовыми x, y, z и сферическими r, φ, θ координатами точки $M \in \mathbf{R}^3$ определяется, как видно из рис. 1.86, следующими формулами:

$$x = r\cos\varphi\cos\theta\ ;\ \ y = r\sin\varphi\cos\theta\ ;\ \ z = r\sin\theta$$

или

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \cos\varphi = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\sin\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

На рис. 1.87–1.89 приведены поверхности и их уравнения в декартовой системе координат. Уравнения этих поверхностей в сферических координатах соответственно:

$$r^2(\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\theta) = 9; \quad r^2(\cos^2\theta - 4\sin^2\theta) = 0,$$

т. е. $\operatorname{tg}^2\theta = 1/4$; $r = \sin\theta$.

Сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (см. рис. 1.77) в сферической системе координат задается уравнением $r = 2$.

Если рассматривать точку M, лежащую на некоторой фиксированной сфере с центром в начале координат, то ее положение на сфере определится заданием координат φ и θ. Координата φ, удовлетворяющая неравенству $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, опишет *географическую долготу* точки M, а координата θ, удовлетворяющая неравенству $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, – *географическую широту* точки M. Северному полюсу соответствует $\theta = \pi/2$,

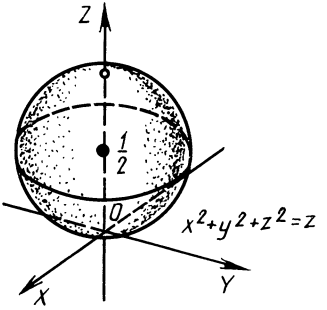
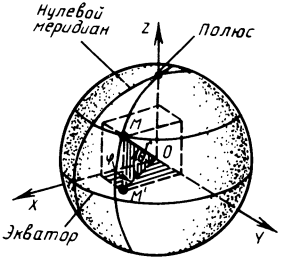


Рис. 1.89



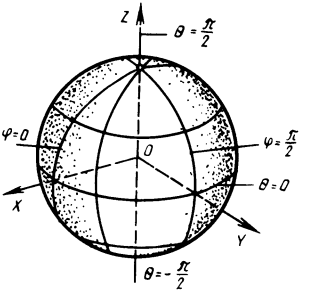


Рис. 1.90

южному полюсу – $\theta = -\pi/2$, $\theta = 0$ – широта экватора. Кривые на сфере, соответствующие фиксированному значению θ , называются *параллелями,* а кривые, отвечающие фиксированному значению φ, – *меридианами* (рис. 1.90).

В качестве сферической координаты θ иногда рассматривают величину угла, образованного радиусом-

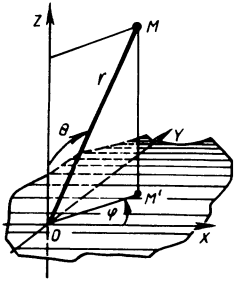


Рис. 1.91

вектором точки и осью Oz, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (рис. 1.91). В этом случае географической широтой точки будет $\frac{\pi}{2} - \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Формулы, связывающие декартовы и сферические координаты точки, примут следующий вид:

$$x = r\cos\varphi \sin\theta\ ;\ \ y = r\sin\varphi\sin\theta\ ;\ \ z = r\cos\theta\ .$$

2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ

2.1. ТОПОЛОГИЯ ПЛОСКОСТИ

При рассмотрении функциональных зависимостей часто приходится иметь дело с отображениями областей E евклидова пространства $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}$. Точками пространства $\mathbf{R}^2$ служат упорядоченные совокупности двух чисел (x, y). *Расстояние между точками* $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (рис. 2.1) определяется формулой

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Множество E точек (x, y) плоскости $\mathbf{R}^2$ называется окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$, если M_0 является внутренней точкой E, т. е. M_0 входит в E вместе с некоторым кругом $B(M_0, r)$: $B(M_0, r) = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$, $r > 0$.

Круг $B(M_0, r)$ также является окрестностью точки M_0.

Наряду с *круговыми окрестностями* точки можно рассматривать *прямоугольные* или в частном случае *квадратные окрестности* точки $M_0 \in \mathbf{R}^2$ (рис. 2.2).

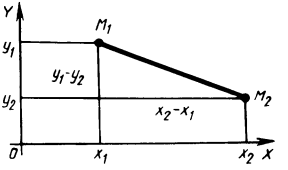

Y
M_1
y_1
y_1-y_2
y_2
M_2
x_2-x_1
0
x_1
x_2
X

Рис. 2.1

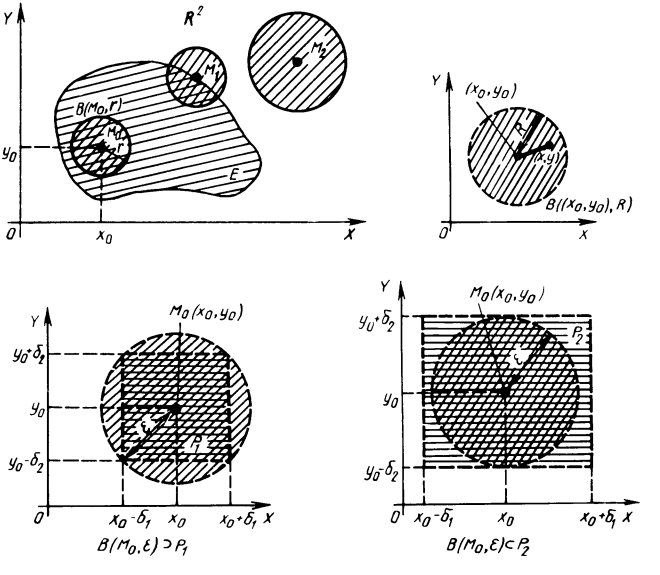

Y
R^2
M_2
M_1
$B(M_0,r)$
M_0
r
y_0
E
0
x_0
X
Y
(x_0,y_0)
R
(x,y)
$B((x_0,y_0),R)$
0
X
Y
$M_0(x_0,y_0)$
$y_0+\delta_1$
y_0
$y_0-\delta_2$
P_1
0
$x_0-\delta_1$
x_0
$x_0+\delta_1$
X
$B(M_0,\varepsilon)\supset P_1$
Y
$M_0(x_0,y_0)$
$y_0+\delta_2$
P_2
y_0
$y_0-\delta_2$
0
$x_0-\delta_1$
x_0
$x_0+\delta_1$
X
$B(M_0,\varepsilon)\subset P_2$

Рис. 2.2

Нетрудно увидеть, что если $B(M_0, \epsilon)$ – круговая ϵ-окрестность точки M_0, то существует ее прямоугольная окрестность P_1, такая, что $B(M_0, \epsilon) \supset P_1$, и, наоборот, существует прямоугольная окрестность P_2, такая, что $P_2 \supset B(M_0, \epsilon)$, т. е. $P_1 \subset B(M_0, \epsilon) \subset P_2$. Рассматривают окрестности и других конфигураций.

Точка плоскости $\mathbf{R}^2$ называется граничной для множества E, если ее любая окрестность содержит как точки из E, так и точки, не входящие в E. (Пример: точка M_1 на рис. 2.2. Точка M_2 – внешняя точка множества E.)

Множество открыто, если оно служит окрестностью каждой своей точки.

Приведем примеры некоторых множеств.

1. $E_1 = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < R^2\}$ – круг без границы (окружности) (рис. 2.3).

2. $E_2 = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2\}$ – круг с границей (рис. 2.4).

3. $E_3 = \{(x, y) \mid a < x < b,\ c < y < d\}$ – прямоугольник без границы (рис. 2.5).

4. $E_4 = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d\}$ – прямоугольник с границей (рис. 2.6).

5. $E_5 = \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 - x\}$ – треугольник без границы (рис. 2.7).

6. $E_6 = \{(x, y) \mid |x| < \frac{1}{\sqrt{2}},\ x^2 < y < -x^2 + 1\}$ – линза (рис. 2.8).

Границы, не принадлежащие множеству, на рисунках изображаются пунктиром. Множества E_1, E_3, E_5, E_6 – открытые.

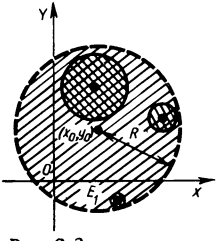


Рис. 2.3

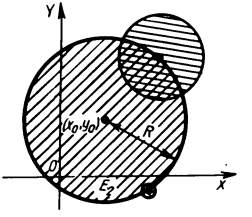


Рис. 2.4

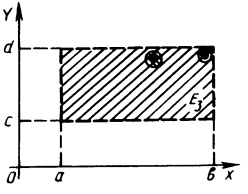


Рис. 2.5

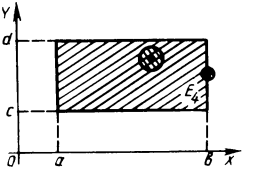


Рис. 2.6

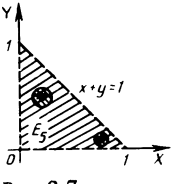


Рис. 2.7

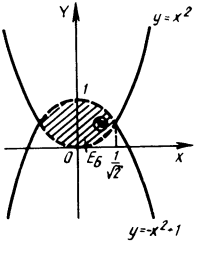


Рис. 2.8

Теорема 1. *Объединение совокупности открытых множеств открыто (рис. 2.9).*

Теорема 2. *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто (рис. 2.10).*

Множество E точек пространства $\mathbf{R}^2$ *замкнуто*, если оно содержит все свои граничные точки (см. множества E_2, E_4). Если из замкнутого множества удалить часть граничных точек (например, из множества E_2 удалить верхнюю полуокружность), то получим множество, которое не является ни открытым, ни замкнутым.

Множество E замкнуто в том и только в том случае, если дополнение этого множества (т. е. совокупность всех точек $\mathbf{R}^2$, которые не входят в E) открыто.

Множество E точек $\mathbf{R}^2$ называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству.

Приведем примеры некоторых множеств.

1. $E = \{(x, y) \mid r^2 \leqslant (x-a)^2 + (y-b)^2 \leqslant R^2\}$ (рис. 2.11). E – связное замкнутое множество.

2. $E = \{(x, y) \mid xy > 0\}$ (рис. 2.12). E – несвязное открытое множество.

3. $E = \{(x, y) \mid xy \geqslant 0\}$ (рис. 2.13). E – связное замкнутое множество.

4. $E = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} \leqslant 1;\ \frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{b_2^2} \geqslant 1, a_2 <$

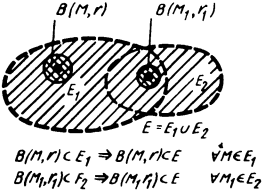


Рис. 2.9

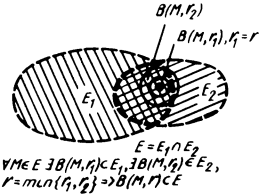


Рис. 2.10

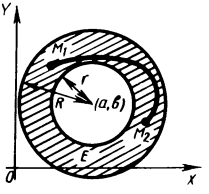


Рис. 2.11

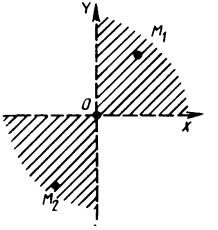


Рис. 2.12

$< a_1$, $b_2 < b_1\}$ (рис. 2.14). Множество E ,представляющее собой объединение множеств E_1 и E_2 , является несвязным замкнутым. Например, точки M_1 и M_2 нельзя соединить кривой, не выходя из E.Множества E_1 и E_2 , взятые отдельно, являются связными подмножествами множества E .

5. $E = \{(x, y) \mid x + y < 1, x > y^2\}$ (рис. 2.15). E – связное открытое множество.

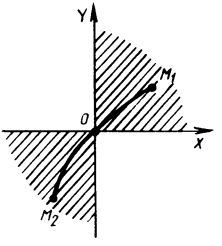


Рис. 2.13

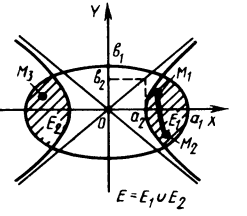


Рис. 2.14

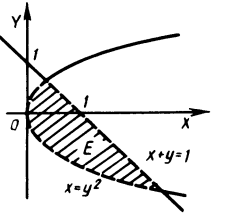


Рис. 2.15

СВЯЗНОЕ ОТКРЫТОЕ МНОЖЕСТВО НАЗЫВАЕТСЯ ОБЛАСТЬЮ.

Точка (x_0, y_0) называется *предельной точкой множества* $E \subset \mathbf{R}^2$, если в любой ее окрестности содержатся точки множества E, отличные от (x_0, y_0). Так, для множества E точек прямоугольника без границы (рис. 2.16) каждая точка $(x, y) \in E$ является предель-

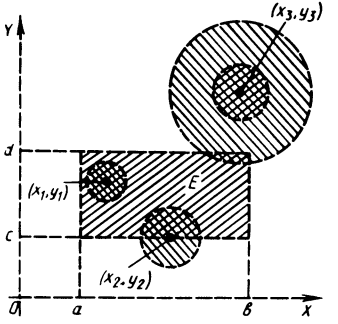


Рис. 2.16

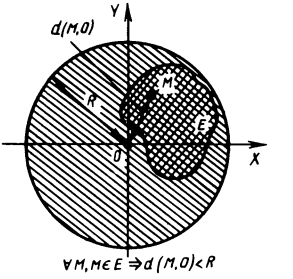


Рис. 2.17

ной точкой множества, но предельными точками будут и точки границы, например точка (x_2, y_2). Точка (x_3, y_3) предельной точкой E не будет, хотя можно указать такую ее окрестность, что в ней содержатся точки из E.

Множество E *ограничено*, если оно содержится в некотором круге с центром в начале координат радиусом R, $R > 0$ (рис. 2.17).

Замкнутое ограниченное множество E называется *компактом.*

2.2. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ГРАФИКИ

Определение. *Функцией, определенной на множестве* $E \subset \mathbb{R}^2$, *называется соответствие* f, *которое каж-*

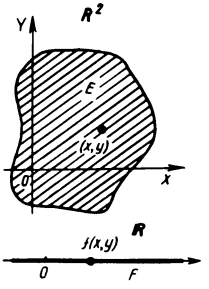


Рис. 2.18

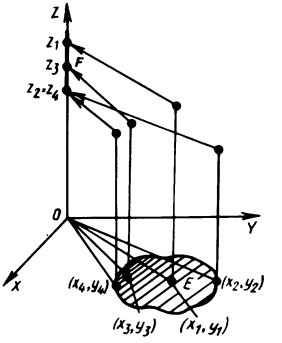


Рис. 2.19

дому элементу (x, y), $(x, y) \in E$, *относит некоторый единственный элемент из* $F \subset \mathbf{R}$, *обозначаемый* $f(x, y)$ (рис. 2.18).

Множество E называют *множеством задания* функции f, совокупность всех элементов $f(x, y)$, $(x, y) \in E$, – *множеством значений* функции f. Тот факт, что f – функция, заданная на $E \subset \mathbf{R}^2$ со значениями в $F \subset \mathbf{R}$, обозначают следующим образом: $f : E \to F$.

Соответствие f, устанавливаемое между точками из E и F, геометрически можно изобразить в пространстве $\mathbf{R}^3$ (рис. 2.19).

Графиком Γ_f функции f называется множество точек пространства $\mathbf{R}^3$ с координатами $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in E$, т. е. $\Gamma_f = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in E,\ z = f(x, y)\}$.

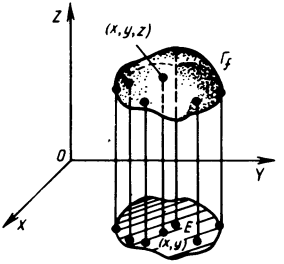


Рис. 2.20

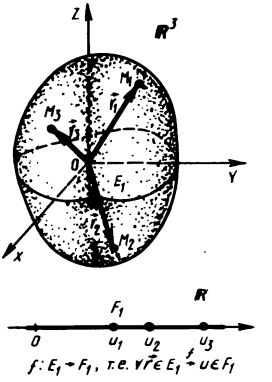


Рис. 2.21

Для построения графика Γ_f функции двух переменных из точки $(x, y) \in E$ перпендикулярно к плоскости Oxy отложим отрезок длиной $|z|$ в положительном направлении оси Oz, если $z > 0$, и в отрицательном направлении, если $z < 0$. Точка пространства $\mathbf{R}^3$ с координатами (x, y, z) будет точкой графика Γ_f. Если E – связное множество, а f непрерывна, то совокупность точек $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ образует некоторую *поверхность* $z = f(x, y)$, $(x, y) \in E$ (рис. 2.20).

Соответствие, устанавливаемое между элементами $(x, y, z) \in E_1$, $E_1 \subset \mathbf{R}^3$, *и элементами множества* $F_1 \subset \mathbf{R}$, *при котором каждому элементу из* E_1 *ставится в соот-*

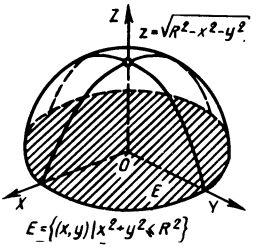


Рис. 2.22

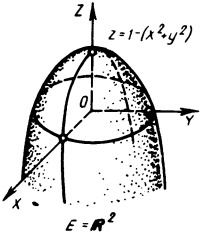


Рис. 2.23

ветствие один элемент из F_1, называется функцией трех переменных.

Множество ее определения есть множество точек пространства $\mathbf{R}^3$. Поскольку каждая точка (x,y,z) определяет в пространстве $\mathbf{R}^3$ радиус-вектор, то функция f трех переменных может рассматриваться как соответствие, устанавливаемое между множеством векторов и множеством действительных чисел. Таким образом, функцию трех переменных можно рассматривать как *скалярную функцию векторного аргумента* (рис. 2.21).

На рис. 2.22–2.24 приведены примеры графиков функций двух переменных.

Понятие функции m переменных. Изложение теории функции m переменных удобно проводить, используя геометрическую терминологию, обобщающую пред-

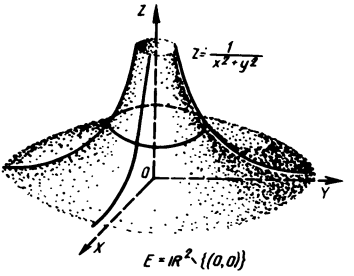


Рис. 2.24

ставление о плоскости и реальном трехмерном пространстве. Множество всех упорядоченных совокупностей $(x_1, ..., x_m)$, где $x_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, m}$, называется *m-мерным координатным пространством* $\mathbf{R}^m$. Каждая упорядоченная совокупность $(x_1, ..., x_m) = M$ называется *точкой* этого пространства. Координатное пространство $\mathbf{R}^m$ называется *евклидовым пространством*, если расстояние между его точками $M(x_1, ..., x_m)$ и $N(y_1, ..., y_m)$ определяется по формуле $d(M, N) =$

$$= \sqrt{\sum_{k=1}^{m} (y_k - x_k)^2} .$$

Евклидово m-мерное пространство является обобщением понятий евклидовой плоскости и трехмерного евклидова пространства.

Если каждой точке M множества E евклидова пространства $\mathbf{R}^m$ *ставится в соответствие одно из чисел*

множества $F, F \subset \mathbf{R}$, *то говорят, что на* E *задана функция* $f, f\colon E \subset \mathbf{R}^m \to F \subset \mathbf{R}$.

E *– множество определения функции* f, F *– множество значений функции.*

2.3. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Предел функции. Рассмотрим функцию f, определенную на множестве E точек евклидова пространства $\mathbf{R}^2$, и точку $M_0(x_0, y_0)$, может быть, и не принадлежащую E, но являющуюся предельной точкой E. Так как M_0 – предельная точка множества E, то существует последовательность точек $M^{(k)}$, принадлежащих E, сходящаяся к M_0, т. е. $M_0 = \lim\limits_{k \to \infty} M^{(k)}$, или для $\forall \epsilon > 0 \; \exists \nu_\epsilon > 0$, такое, что $\forall m \in N, m \geqslant \nu_\epsilon \Rightarrow d(M^{(m)}, M_0) \leqslant \epsilon$ (рис. 2.25).

Определение. *Число* A *называют пределом функции* $f\colon E \to \mathbf{R}$ *при* $(x, y) \to (x_0, y_0)$, *что обозначают* $f(x, y) \to A$ *при* $(x, y) \to (x_0, y_0)$, *если для любого положительного числа* ϵ *существует положительное число* δ, *такое, что для всех* (x, y), $0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$, *выполняется неравенство* $|f(x,y) - A| < \epsilon$ (рис. 2.26).

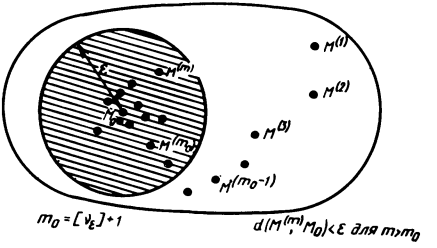


Рис. 2.25

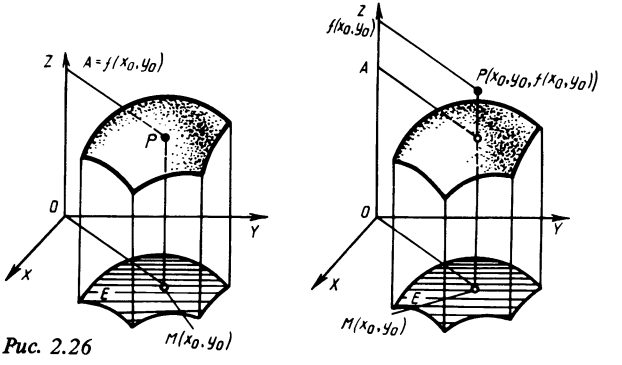


Рис. 2.26

В краткой записи:

$$\left(\begin{array}{l} f(x, y) \to A \\ \text{при } (x, y) \to (x_0, y_0) \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (x, y) \in E \\ 0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2 \Rightarrow |f(x,y) - A| < \epsilon . \end{array}\right)$$

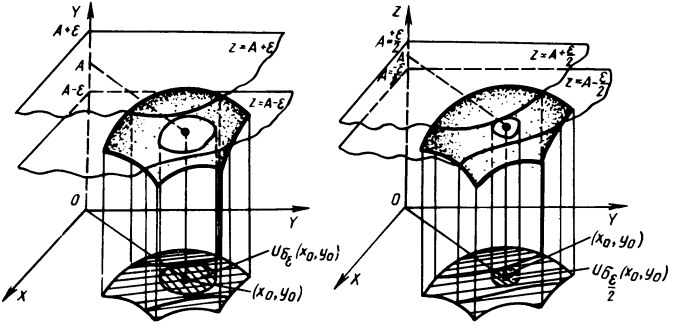


Рис. 2.27

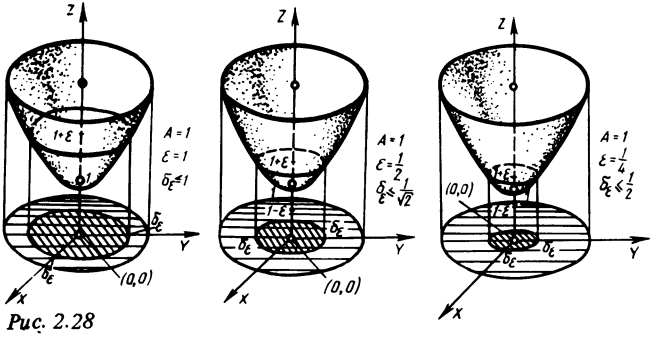


Рис. 2.28

Размеры δ-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ существенно зависят от величины ϵ (рис. 2.27).

Пределом функции $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ при $(x, y) \to (0,0)$ является число 1. Если взять $\epsilon = 1$, то $\delta \leqslant$

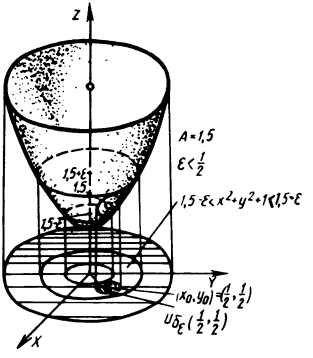


Рис. 2.29

$\leqslant 1$. При $\epsilon = 0{,}5$ величина δ не должна быть больше $1/\sqrt{2}$, а если $\epsilon = 1/4$, то $\delta \leqslant 0{,}5$ (рис. 2.28).

Пределом функции $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ (в точке $(0{,}5;\ 0{,}5)$ является число $A = 3/2$. Если взять $\epsilon < 0{,}5$, то в качестве δ-окрестности точки $(0{,}5;\ 0{,}5)$ будет круг с центром в этой точке, расположенный в кольце $1{,}5 - \epsilon < x^2 + y^2 + 1 < 1{,}5 + \epsilon$ (рис. 2.29). Если взять $\epsilon > 0{,}5$, то размеры δ должны быть такие, чтобы δ-окрестность располагалась внутри круга $x^2 + y^2 < R^2$, $R > 1$ (рис. 2.30).

Критерий существования предела функции (критерий Гейне). *Для существования предела* $f\colon E \to \mathbf{R}$ *при* $(x, y) \to (x_0, y_0)$ *необ-*

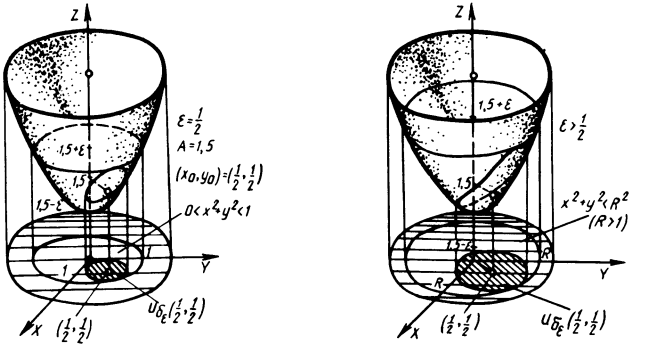


Рис. 2.30

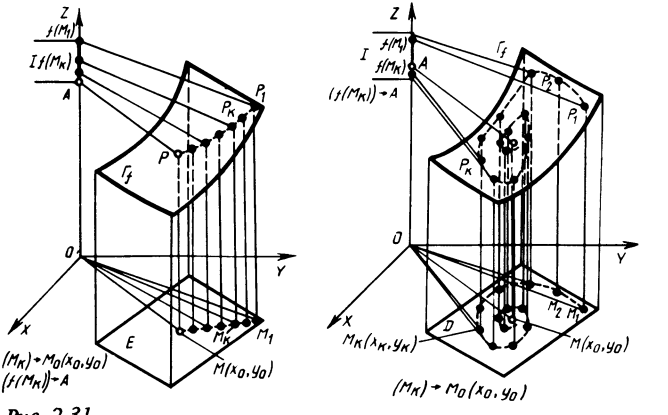


Рис. 2.31

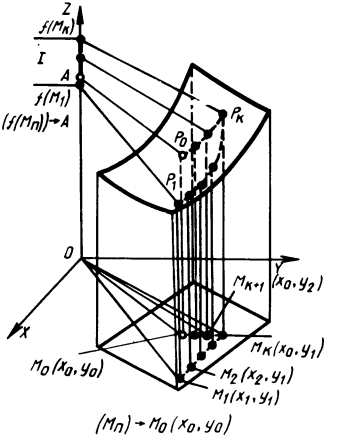


Рис. 2.32

ходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек $((x_n, y_n))$, $(x_n, y_n) \in E / \{(x_0, y_0)\}$, *сходящейся к* (x_0, y_0), *соответствующая последовательность* $(f(x_n, y_n))$ *сходилась к одному и тому же пределу* $A \in \mathbf{R}$ (*рис. 2.31*).

Удобно в качестве последовательности $((x_n, y_n))$, сходящейся к (x_0, y_0), поочередно брать последовательности с одной закрепленной координатой (рис.2.32). При вычислении предела функции это приводит к так называемым *повторным пределам*. Например, зная,

что предел функции $f(x, y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 y^2}$ при $(x, y) \to$

$\to (0,0)$ существует, вычислим оба повторных предела:

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{xy}{1 + x^2 y^2} \right) = \lim_{x \to 0} 0 = 0;$$

$$\lim_{y \to 0} \left(\lim_{x \to 0} \frac{xy}{1 + x^2 y^2} \right) = \lim_{y \to 0} 0 = 0 .$$

При существовании *двойного предела* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ и *одинарных пределов* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$, $\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ повторные пределы существуют и равны двойному, т. е. пределу функции. Из критерия Гейне следует, что если повторные пределы различны, то не существует предела функции. Например,

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y = 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1; \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ не существует.

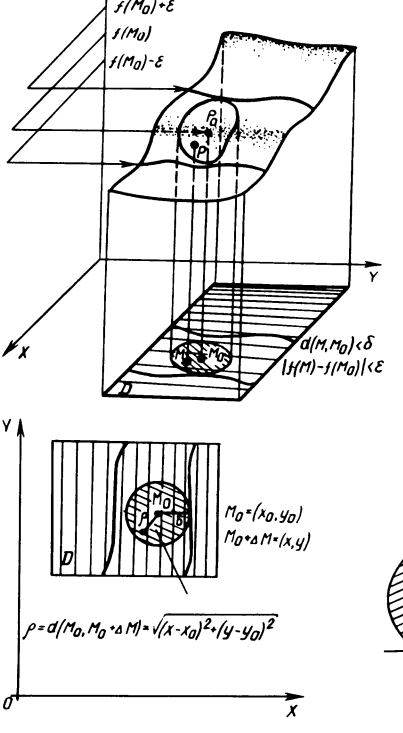


Рис. 2.33

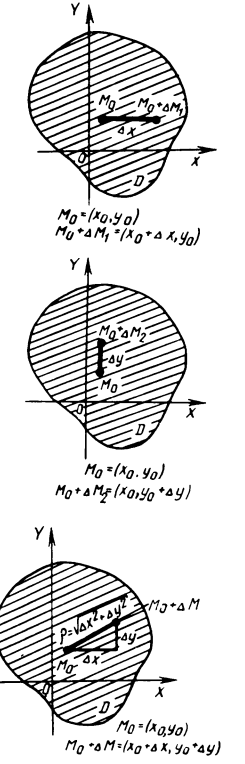


Рис. 2.34

Непрерывность функции. *В пространстве* $\mathbf{R}^2$ *рассмотрим область* D *и точку* $M_0 \in D$ (рис. 2.33). *Функция* f: $D \to \mathbf{R}$ *непрерывна в точке* M_0, *если* $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(\lim\limits_{M \to M_0} M) = f(M_0)$, *что равносильно:*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall M \in D,\ d(M, M_0) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(M) - f(M_0)| < \epsilon .$$

Если $M_0(x_0; y_0)$ – предельная точка D-множества определения функции f, но не является его внутренней точкой, то непрерывность f в точке M_0 вдоль D означает, что

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in D}} f(M) = f(M_0) .$$

Точки множества. в которых функция f не обладает непрерывностью, называются *точками разрыва* функции.

Непрерывность функции по одной переменной. *Функция* $f(x, y)$ *непрерывна в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *по одной из переменных, например* x, *если* $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$, *такое, что* $\forall (x_0 + \Delta x, y_0) \in D \quad |\Delta x| \leqslant \delta \Rightarrow |f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)| \leqslant \epsilon$, *т. е.* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(x_0, y_0)$ (*рис. 2.34*).

Например, функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

непрерывна в точке $(0, 0)$ по каждой из переменных:

$$f(0, y) = 0 \text{ при } y \neq 0, \qquad \lim_{y \to 0} f(0, y) = f(0, 0);$$

$$f(x, 0) = 0 \text{ при } x \neq 0, \qquad \lim_{x \to 0} f(x, 0) = f(0, 0),$$

но не является непрерывной функцией в точке $(0, 0)$, так как $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) \neq 0$. Действительно, если положить $y = kx$, то $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \dfrac{2k}{1 + k^2}$ зависит от выбора k. Если к точке $(0, y)$ стремиться, например, по биссектрисе $(k = 1)$, то в пределе будем иметь единицу, а не нуль, как при стремлении по координатной оси.

Арифметические операции над непрерывными функциями. *Пусть* $f : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *и* $g : D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *непрерывны в точке* M_0, *где* $M_0 \in D$, *тогда* :

$\alpha f(M) + \beta g(M)$ *непрерывна в* M_0 *при любых* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$;
$f(M) \cdot g(M)$ *непрерывна в* M_0;
$f(M) : g(M)$ *непрерывна в* M_0 *при* $g(M_0) \neq 0$.

Теорема о локальной ограниченности. *Если* $f: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *и* f *непрерывна в точке* $M_0 \in D$, *то существует* δ*-окрестность точки* M_0, $u_\delta(M_0)$, *что на* $u_\delta(M_0) \cap D$ *функция* f *ограничена.*

Теорема о стабилизации знака. *Если* $f: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *непрерывна в точке* M_0, $M_0 \in D$, *причем* $f(M_0) \neq 0$, *то существует* δ*-окрестность точки* M_0, $u_\delta(M_0)$, *такая, что для всех точек* M, $M \in u_\delta(M_0) \cap D$, *значение* $f(M)$ *имеет знак, совпадающий со знаком* $f(M_0)$.

2.4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ

Частные приращения функции двух переменных. Рассмотрим функцию f, заданную на множестве $D \subset \mathbf{R}^2$, $M_0(x_0, y_0)$ — внутренняя точка множества D. Возьмем точки $M_0 + \Delta M_1$, $M_0 + \Delta M_2$, $M_0 + \Delta M$, принадлежащие D (рис. 2.35).

Частным приращением функции f по x называется разность $f(M_0 + \Delta M_1) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$. Разность $f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ — *частное приращение функции f по y* (рис. 2.36).

Частные производные функции. Пусть $f: D \to \mathbf{R}$ и M_0 — внутренняя точка D. Фиксируя переменную $y, y = y_0$, получаем функцию одной переменной $x: f(x, y_0)$. Производная этой функции в точке x_0, если она существует, называется *частной производной по x функции*

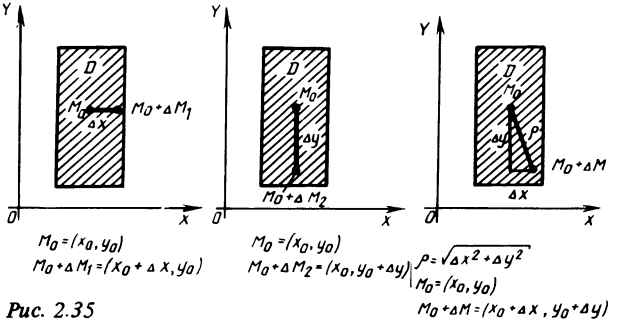


Рис. 2.35

$f(x, y)$ *в точке* (x_0, y_0) и обозначается $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x}$ или $f'_x(M_0)$.

Из определения производной функции $f(x, y_0)$ в точке x_0 следует, что

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная по y функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

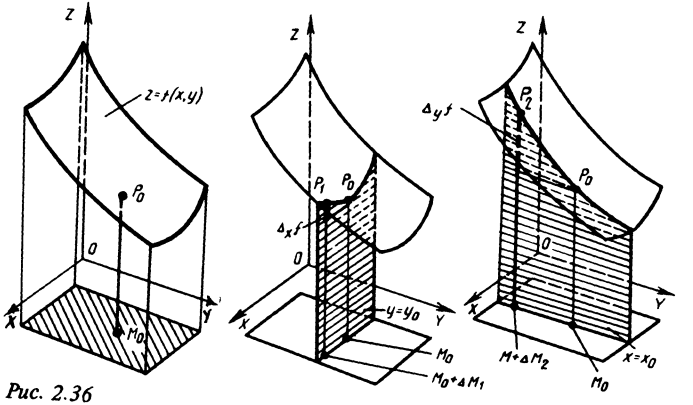


Рис. 2.36

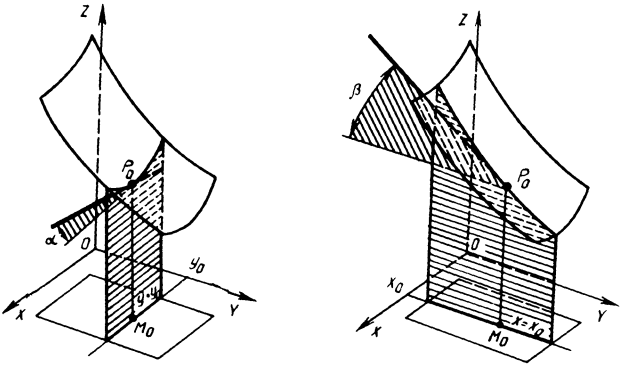


Рис. 2.37

С геометрической точки зрения частные производные функции $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 2.37) представляют собой *угловые коэффициенты касательных к кривым,* получаемым в пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $y = y_0$ и $x = x_0$, в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, т. е.

$$f'_x(M_0) = \operatorname{tg}\alpha; \quad f'_y(M_0) = \operatorname{tg}\beta.$$

Отметим, что частная производная функции нескольких переменных представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной при фиксированных значениях остальных переменных. При нахождении частных производных используются правила вычисления производных функции одной переменной.

Частная производная в граничной точке. Частная производная функции $f: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ определяется в точке $M_0(x_0, y_0)$, являющейся внутренней точкой множества D – множества определения функции f. Если точка $M_0(x_0, y_0)$ – граничная точка D, то частные производные функции f в этой точке определяются как пределы (рис. 2.38):

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} f'_x(x, y_0);$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} f'_y(x_0, y).$$

Но не для всякой граничной точки множества D это определение пригодно. Например, если D имеет вид, изо-

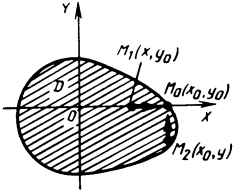


Рис. 2.38

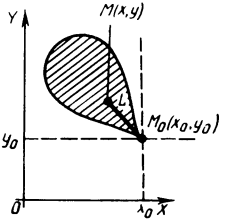


Рис. 2.39

браженный на рис. 2.39, то в граничной точке $M_0(x_0, y_0)$ нельзя определить ни одной из частных производных $f'_x(x, y_0)$ и $f'_y(x_0, y)$. Но возможны равенства $f'_x(x_0, y_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f'_x(x, y)$; $f'_y(x_0, y_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f'_y(x, y)$ при $(x, y) \in L$, где L – некоторая кривая из D.

Полное приращение функции. Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ есть внутренняя точка множества D – множества задания функции f.

Полным приращением функции f в точке M_0, соответствующим приращениям аргументов Δx и Δy (рис. 2.40), называется разность

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= f(M_0 + \Delta M) - f(M_0) = \Delta f(M_0),$$

где точка $M_0 + \Delta M$ принадлежит D.

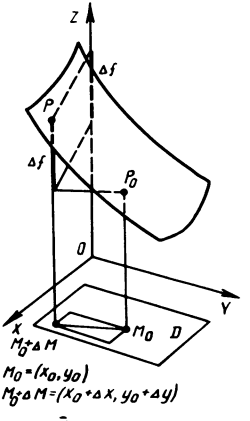


Рис. 2.40

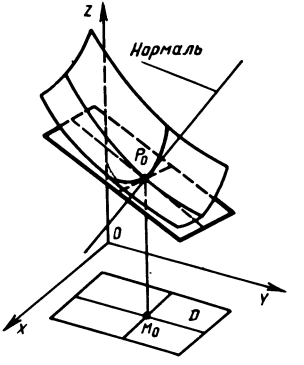


Рис. 2.41

Если для f существуют в M_0 частные производные, то, используя теорему о конечных приращениях (теорему Лагранжа) для функции одной переменной, полное приращение функции можно записать в виде

$$\Delta f(M_0) = (f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)) +$$

$$+ (f(x_0 + \Delta x. y_0) - f(x_0, y_0)) = f'_y(x_0 + \Delta x, y_0 +$$

$$+ \theta_1 \Delta y)\Delta y + f'_x(x_0 + \theta_2 \Delta x, y_0)\Delta x,$$

где $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

Дифференциал функции. Функция $f: D \to \mathbf{R}, D \subset \mathbf{R}^2$, называется *дифференцируемой* в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$, если ее полное приращение $\Delta f(x_0, y_0)$ представимо в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

где $A, B \in \mathbf{R}$, $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Теорема 1. Если f *дифференцируема в* M_0, *то существуют* $f'_x(M_0)$ и $f'_y(M_0)$, *равные соответственно* A и B, *т. е.* $\Delta f(M_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + o(\rho)$.

Теорема 2. *Если* f *имеет в* M_0 *непрерывные частные производные, то она дифференцируема в* M_0.

Выражение $f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y = df(M_0)$ называется *полным дифференциалом* функции f в точке M_0 или *дифференциалом функции* и обозначается $df(M_0)$. Для дифференцируемости функции f в точке M_0 необходимо наличие в этой точке обеих частных производных, т. е. двух касательных к линиям пересечения поверхности $z = f(x, y)$ с плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$ в точке P_0 (рис. 2.41). Вместе с тем для дифференцируемости f в точке M_0 достаточна непрерывность указанных частных производных. В последнем случае можно построить *касательную плоскость* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке P_0. Очевидно, что в этой плоскости лежат и касательные прямые к сечениям.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ имеет вид

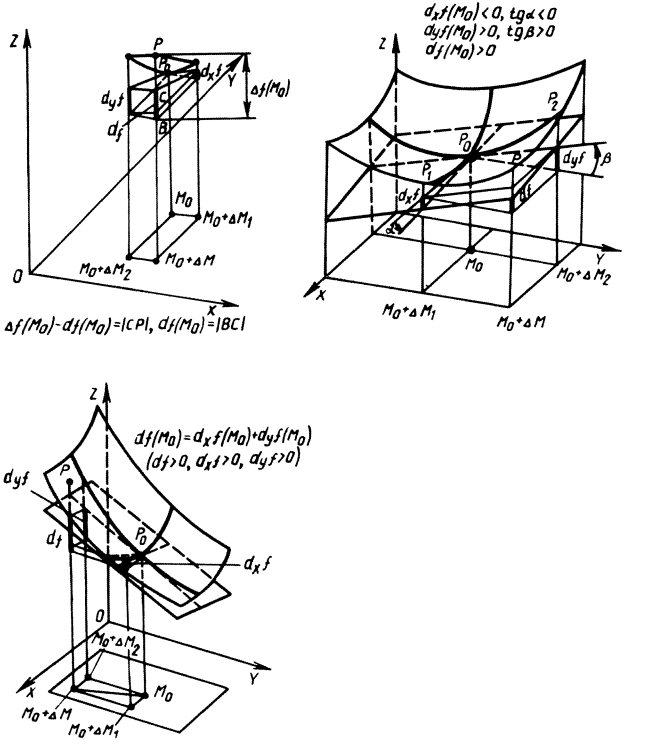

Z
P
M_0
$d_x f$
Y
$\Delta f(M_0)$
$d_y f$
C
d_f
B
M_0
$M_0+\Delta M_1$
0
$M_0+\Delta M_2$
$M_0+\Delta M$
X
$\Delta f(M_0)-df(M_0)=|CP|$, $df(M_0)=|BC|$
$d_x f(M_0)<0$, $tg\alpha<0$
$d_y f(M_0)>0$, $tg\beta>0$
$df(M_0)>0$
Z
P_2
P_0
P_1
$d_y f$
β
$d_x f$
M_0
Y
$M_0+\Delta M_2$
X
$M_0+\Delta M_1$
$M_0+\Delta M$
Z
$df(M_0)=d_x f(M_0)+d_y f(M_0)$
$(df>0,\ d_x f>0,\ d_y f>0)$
$d_y f$
P
d_f
P_0
$d_x f$
0
$M_0+\Delta M_2$
Y
X
M_0
$M_0+\Delta M$
$M_0+\Delta M_1$

Рис. 2.42

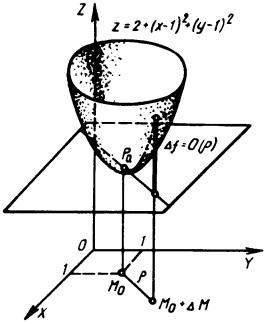


Рис. 2.43

$$z - z_0 = f'_x(M_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

где $z_0 = f(x_0, y_0)$; (x_0, y_0, z_0) – *точка касания*; (x, y, z) – *текущая точка* касательной плоскости P. Учитывая, что выражение $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ определяет дифференциал функции, имеем $z - z_0 = df(M_0)$, т. е. дифференциал функции f в точке $M_0(x_0, y_0)$ численно равен приращению аппликаты (третьей координаты точки пространства $\mathbf{R}^3$ декартовой системы координат) точки касательной плоскости при переходе от точки M_0 к точке $M_0 + \Delta M$ (рис.2.42).

На рис. 2.43 рассматривается функция $z = (x-1)^2 + (y-1)^2 + 2$. Очевидно, что $df(1,1) = 0$, так как касательная плоскость к поверхности в точке $P_0(1,1,2)$ па-

раллельна плоскости Oxy.

Производная сложной функции. В предположении дифференцируемости рассматриваемых в этом пункте функций и возможности составления композиций из них справедливы следующие равенства:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \text{ если } z = f(x,y) \text{ и } x = x(t),\ y = y(t);$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \text{ если } z = f(x,y,t) \text{ и } x = x(t),\ y = y(t);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}, \text{ если } z = f(x, y) \text{ и } x = x(u, v);\ y = y(u, v). \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{cases}$$

Инвариантность формы дифференциала. Для функции f двух независимых переменных x, y дифференциал в точке (x, y) определяется через частные производные

$$df(x, y) = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy,$$

где $\Delta x := dx$, $\Delta y := dy$ – приращения аргументов.

Если рассматривается функция f переменных x, y, причем эти переменные в свою очередь являются функциями переменной t так, что возможна их композиция с f, то

$$df(x, y) = df(x(t), y(t)) = f'_t(x(t), y(t))\,dt =$$

$$= (f'_x(x, y)\cdot x'(t) + f'_y(x, y)\cdot y'(t))\,dt = f'_x(x, y)\,dx +$$

$$+ f'_y(x, y)\,dy\ ,$$

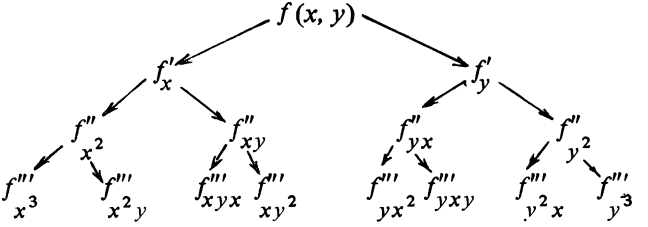
где $dx = x'(t)\,dt$; $dy = y'(t)\,dt$.

Свойство дифференциала $df(x, y)$ сохранять свою форму независимо от того, будут ли переменные x , y, от которых зависит функция f , независимыми или зависимыми, называется *инвариантностью формы* дифференциала.

2.5. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Частные производные высших порядков. Пусть функция f: $D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ в окрестности E точки M имеет частные производные f'_x и f'_y , которые в свою очередь являются функциями двух переменных. Если они обладают в точке M частными производными, то эти производные называются *производными второго порядка* функции f .

По аналогии с частными производными второго порядка вводятся *производные третьего и всех последующих порядков*:



. . . . . .

Частные производные также можно обозначать следующим образом:

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = D^2_{x^2} f; \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = D^2_{xy} f.$$

Производные f''_{xy} и f''_{yx} называют *смешанными производными* второго порядка.

Теорема о смешанных производных. *Если смешанные производные f''_{xy} и f''_{yx} второго порядка функции $f(x, y)$ непрерывны в точке M, то они в этой точке совпадают: $f''_{xy}(M) = f''_{yx}(M)$.*

Следствие. Если все частные производные порядка n функции двух переменных непрерывны в точке M, то величина каждой частной производной в этой точке зависит только от общего числа дифференцирований по x и по y, т. е. равна частной производной вида $\frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$, если число дифференцирований по x равно k.

Дифференциалы высших порядков. Дифференциал функции f называют также дифференциалом первого порядка и обозначают $d^1 f$. *Дифференциалом n-го порядка* функции f называют дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка:

$$d^n f = d(d^{n-1} f)$$

при условии существования $d^{n-1} f$ и дифференцируемости его.

Если функция f дважды дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке существуют все ее частные производные второго порядка и

$$d^2 f = d(df) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\Delta x\,\Delta y +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 ,$$

где $\Delta x := dx$, $\Delta y := dy$.

Если функция двух переменных f непрерывно дифференцируема n раз в точке $M \in D$, то $d^n f$ представляет сумму слагаемых вида $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}}$ с коэффициентами

$$C_n^i = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}, \quad d^n f = \sum_{n=0}^{n} C_n^i \frac{d^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} dx^i dy^{n-i}.$$

Дифференциалы порядка выше первого не обладают инвариантностью формы. Покажем это для диффе-

ренциала второго порядка. Если x, y – независимые переменные, являющиеся аргументами функции $z = f(x,y)$, имеющей непрерывные производные второго порядка в области ее определения, то

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 .$$

Если $z = f(x, y)$ и функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ таковы, что возможна их композиция с f, то второй дифференциал $d^2 z$ при условии его существования вычисляется по формуле

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y ,$$

где $d^2 x = x''(t)\,dt^2$; $d^2 y = y''(t)\,dt^2$.

3. ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

3.1. НЕПРЕРЫВНЫЕ НА МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИИ

Функция f, определенная на множестве G, являющемся областью или объединением областей, называется непрерывной на этом множестве, если она непрерывна в каждой точке G (рис. 3.1).

Например, функция $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ непрерывна на плоскости Oxy (рис. 3.2), а функция $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 3.3) непрерывна на Oxy, за исключением точки $(0, 0)$.

Функция f, определенная на замкнутом множестве, называется непрерывной на этом множестве, если она непрерывна вдоль указанного множества во всех его точках.

О структуре множества значений непрерывной функции говорят следующие теоремы.

Теорема Вейерштрасса *(теорема об экстремальных значениях). Функция, непрерывная на компакте, ограничена и достигает своих точных верхней и нижней границ (рис. 3.4).*

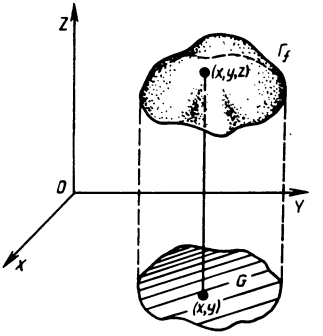


Рис. 3.1

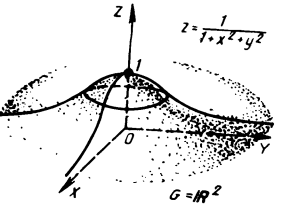


Рис. 3.2

Заметим, что все условия теоремы Вейерштрасса являются существенными, т. е. если какое-либо из условий опустить, не изменяя остальных, то теорема перестает быть справедливой. Например, функция $f(x,y)= = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ (рис. 3.5), непрерывная во всех точках замкнутого круга $K: x^2+y^2 \leqslant R^2$, за исключением точки $(0, 0)$, не ограничена сверху на этом множестве. Какое бы значение $z = c$ ни взять, всегда найдется точка M^*, $M^* \in K$, что $f(M^*) > c$.

Функция, непрерывная на открытом множестве, может не достигать наибольшего и наименьшего значений. Например, функция $z = \frac{4}{3}(x^2+y^2)$ непрерывна в открытом круге $K: x^2+y^2 < 1$ (рис. 3.5). Точная верх-

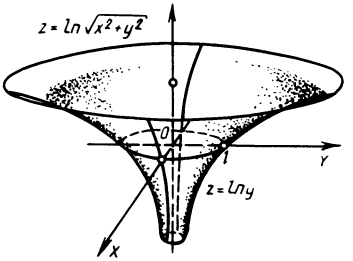


Рис. 3.3

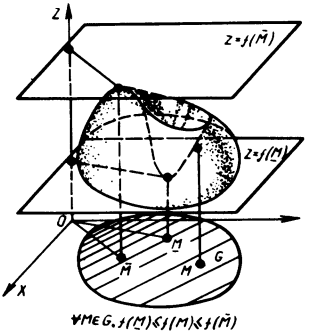


Рис. 3.4

няя граница множества ее значений равна 4/3. Ни в одной точке круга не выполняется равенство $f(M) = 4/3$.

Теорема Вейерштрасса дает достаточные условия существования экстремальных значений функции на замкнутом связанном множестве. Однако эти условия не являются необходимыми. Например, функция $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ непрерывна всюду на множестве $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 3.6), за исключением точки $(0, 0)$, причем доопределить в этой точке функцию таким образом, чтобы она стала непрерывной, нельзя, так как

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

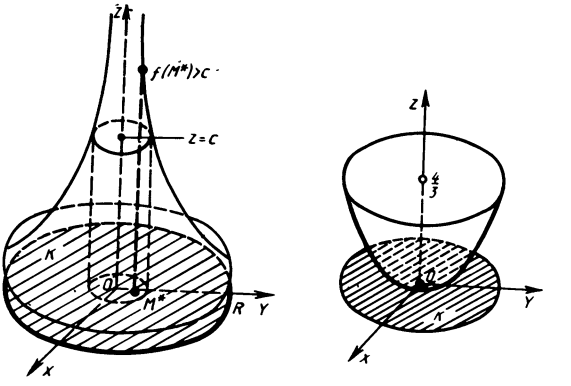

z
f(M*)>c
z=c
K
0
M*
R
Y
x
z
4/3
0
Y
K
x

Рис. 3.5

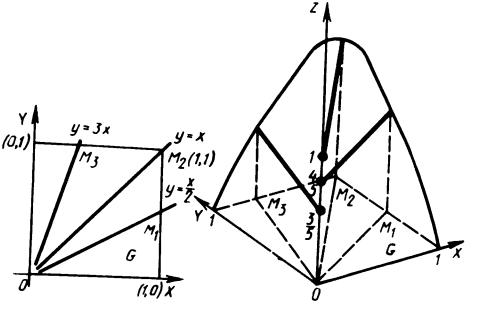

Y
(0,1)
y=3x
y=x
M3
M2(1,1)
y=x/2
M1
G
0
(1,0) X
z
1
4/5
M3
M2
Y 1
3/5
M1
G
1
x
0

Рис. 3.6

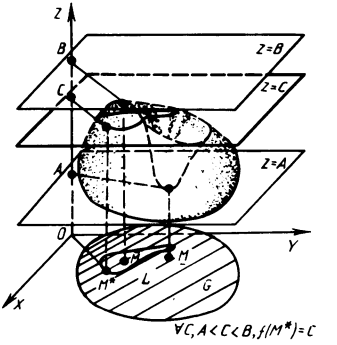


Рис. 3.7

Однако на этом множестве функция ограничена: $0 \leqslant f(M) \leqslant 1$ и достигает своих наибольшего и наименьшего значений: $f(1, 1) = 1$; $f(1, 0) = 0$.

Теорема о промежуточном значении. *Если функция f непрерывна на связном множестве G пространства $\mathbf{R}^2$ и принимает на этом множестве значения A и B, $A, B \in \mathbf{R}$, то она принимает и все промежуточные значения, т. е. для любого C, $A < C < B$, найдется хотя бы одна точка M^*, $M^* \in G$, что $f(M^*) = C$* (рис. 3.7).

Заметим, что точка M^* может быть не единственной. Для любой точки $M \in L$ (рис. 3.7) выполняется условие $f(M) = C$.

Следствие. Множеством значений функции, непрерывной на связном замкнутом ограниченном множестве, служит отрезок.

Определение. Функция f называется *равномерно непрерывной* на $G \subset \mathbf{R}^2$, если $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, что $\forall M_1, M_2 \in G$

$$d(M_1, M_2) \leqslant \delta \Rightarrow |f(M_1) - f(M_2)| \leqslant \epsilon .$$

Теорема о равномерной непрерывности. *Если f непрерывна на компакте, то она равномерно непрерывна на этом множестве.*

3.2. ЭКСТРЕМУМ

Локальный экстремум функции. Внутренняя точка $\overline{M}$ множества $G \subset \mathbf{R}^2$ называется точкой *локального максимума* функции $f : G \to \mathbf{R}$, если существует окрестность E точки $\overline{M}$, принадлежащая G, что $\forall M \in E \quad f(\overline{M}) \geqslant f(M)$.

Точка $\overline{M}$ будет точкой *строгого локального максимума*, если для $\forall M \in E$ выполняется неравенство $f(\overline{M}) > f(M)$. Точка $\underline{M}$ называется точкой *локального минимума* функции $f : G \to \mathbf{R}$, если существует окрестность E точки $\underline{M}$, принадлежащая G, что $f(\underline{M}) \leqslant f(M) \quad \forall M \in E$, *строгого локального минимума,* если $f(\underline{M}) < f(M)$.

Для функций $z = x^2 + y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ точка $(0, 0)$ – точка минимума; функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

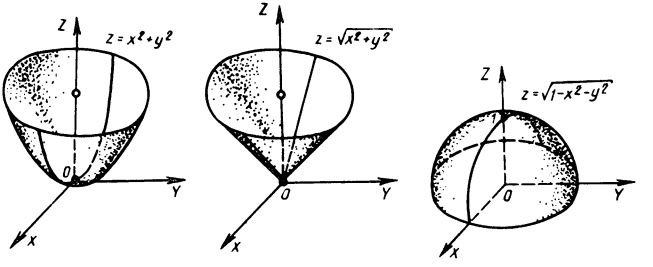


Рис. 3.8

в точке (0, 0) имеет локальный максимум (рис. 3.8). Точки минимума и максимума функции называются точками *экстремума.* При определении точек экстремума основную роль играют производные функции, ее дифференциал.

Необходимое условие экстремума функции. *Дифференцируемая функция* $f : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *имеет локальный экстремум лишь в точках* $(x, y) \in G$, *в которых* $df(x, y) = 0$, *т. е. в точках, в которых обе частные производные функции обращаются в нуль:*

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Геометрически сказанное означает, что касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в точке экстремума M_0 параллельна плоскости Oxy (рис. 3.9). Для

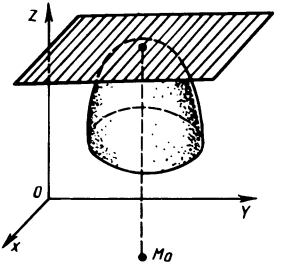


Рис. 3.9

недифференцируемой функции точками локального экстремума могут быть точки, в которых не существуют частные производные, – *точки острого локального экстремума* (рис. 3.10).

Равенство нулю частных производных дифференцируемой в точке M_0 функции является необходимым условием экстремума функции в этой точке, но не достаточным. Например, обе производные функции $z = x^2 - y^2$ (рис. 3.11) в точке $(0, 0)$ равны нулю, однако, как видно из поведения функции в окрестности этой точки, экстремума в точке $(0, 0)$ нет, $(0, 0)$ – *седловая точка.*

Достаточное условие экстремума. *Пусть функция* $f : G \to \mathbf{R}$ *дифференцируема в окрестности точки* $M_0 \in G$ *и дважды непрерывно дифференцируема в точке* M_0 *, причем* $df(M_0) = 0$. *Обозначим*

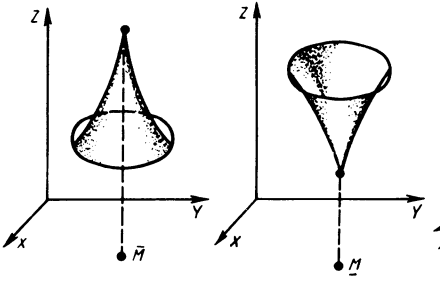


Рис. 3.10

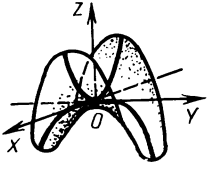


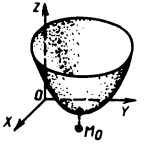
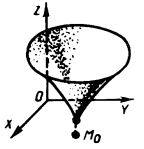
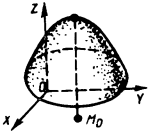
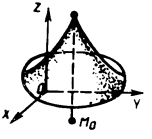
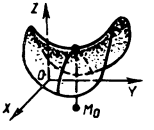
Рис. 3.11

$$d_1 = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2}, \quad d_2 = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Если $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, то M_0 – точка максимума $f(x, y)$; если $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, то M_0 – точка минимума $f(x, y)$; если $d_2 < 0$, функция f экстремума в точке M_0 не имеет; если $d_2 = 0$, ничего определенного о точке M_0 сказать нельзя.

Достаточное условие экстремума функции удобнее сформулировать с помощью дифференциалов. Пусть функция $f : G \to \mathbf{R}$, дифференцируемая в некоторой окрестности E точки M_0, дважды непрерывно диффе-

Таблица 3.1

Изображение функции	Экстремум	Условие экстремума
	Гладкий локальный минимум	$df(M_0) = 0$ $d^2f(M_0)$ – положительно определенная форма
	Острый локальный минимум	$df(M_0)$ не существует
	Гладкий локальный максимум	$df(M_0) = 0$ $d^2f(M_0)$ – отрицательно определенная форма
	Острый локальный максимум	$df(M_0)$ не существует
	Седловая точка	$df(M_0) = 0$ $d^2f(M_0)$ – знакопеременная форма

ренцируема в точке M_0. Точка M_0 – *стационарная точка* функции f, т. е. $df(M_0)=0$.

Если $d^2f(M_0)$ является положительно определенной квадратичной формой переменных dx, dy, то функция f в точке M_0 имеет минимум; если квадратичная форма $d^2f(M_0)$ – отрицательно определенная, то f в точке M_0 имеет максимум; если же $d^2f(M_0)$ представляет собой знакопеременную квадратичную форму, то функция f в точке M_0 экстремума не имеет; случай $d^2f(M_0)=0$ требует дополнительного исследования (табл. 3.1).

Пусть точка $O(0,0)$ – стационарная точка функции $f(x,y)$ и $f(0,0)=0$. Для выяснения геометрического смысла приведенных условий рассмотрим в пространстве $Oxyz$ поверхности $z=f(x,y)$ и $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$, где

$$A=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2};\quad B=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y};\quad C=\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}.$$

Расстояние между этими поверхностями в точке (x,y), определяемое разностью $f(x,y)-(Ax^2+2Bxy+Cy^2)$, при $\rho=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ равно $o(\rho)$, так как $Ax^2+2Bxy+Cy^2=d^2f(0,0)$. Поверхность $z=Ax^2+2Bxy+Cy^2$ представляет собой *эллиптический параболоид* с вершиной в точке O, направленный вверх (в положительном направлении оси Oz), когда $d^2f(0,0)>0$, и направленный вниз (в отрицательном направлении оси Oz), когда $d^2f(0,0)<0$. В случае, когда

$d^2f(0,0)$ знакопеременна, точка O $(0,0)$ является седловой. Близкую форму при малом ρ имеет и поверхность, описываемая уравнением $z = f(x, y)$.

Особая точка поверхности. *Особой точкой функции $f(x, y)$ называется точка, в которой функция не дифференцируема, т. е. точка, в которой не существует хотя бы одна из частных производных функции или эти производные не являются непрерывными в точке.*

Касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в особой точке не существует. Примерами особых точек служат точки острого локального экстремума функции $z = f(x, y)$. Для функции $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ особой точкой является точка $(0, 0)$. Функция $z = \sqrt{|xy|}$ непрерывна всюду в $\mathbf{R}^2$, в точке $(0, 0)$ существуют обе частные производные, причем $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$, но эти производные не являются непрерывными в точке $(0, 0)$. Действительно,

$$\lim_{\substack{x \to +0 \\ y = kx}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\substack{x \to +0 \\ y = kx}} (\sqrt{|xy|})'_x =$$

$$= \lim_{\substack{x \to +0 \\ y = kx}} \frac{1}{2}\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|} = \frac{\sqrt{|k|}}{2}.$$

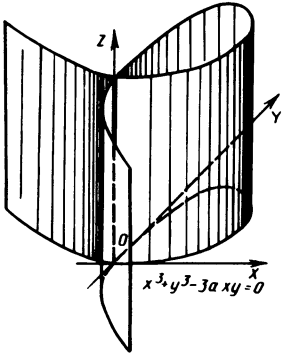


Рис. 3.12

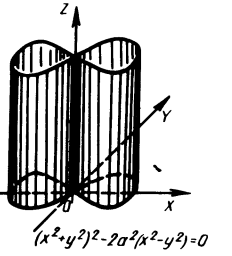


Рис. 3.13

Если поверхность определяется как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$ (*неявное задание* функции), то точка, в которой все частные производные функции f равны нулю, называется *особой* точкой поверхности. Если в особой точке не все частные производные второго порядка обращаются в нуль, то касательные к поверхности в особой точке образуют конус. Особые точки могут образовывать так называемые особые линии, например линии самопересечения (рис. 3.12, 3.13).

Глобальный экстремум функции. Рассмотрим вопрос об определении наибольшего и наименьшего значений функции $f(x, y)$, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве $D \subset \mathbf{R}^2$. Говорят, что $f(x, y)$

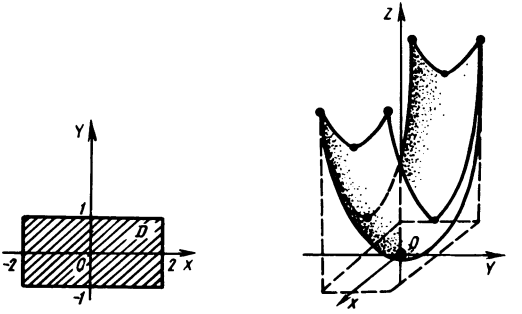


Рис. 3.14

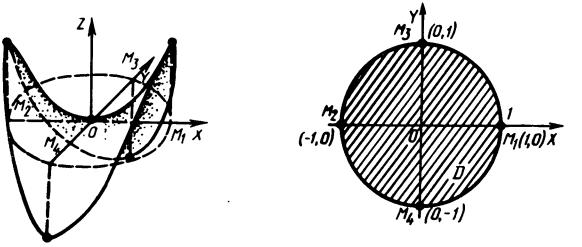


Рис. 3.15

принимает в точке $M_0 \in D$ наибольшее значение или имеет в точке M_0 *глобальный максимум*, если $f(M_0) \geqslant f(M)$ $\forall\, M \in D$. Функция f имеет в точке M_0 *глобальный минимум*, если $f(M_0) \leqslant f(M)$ $\forall M \in D$.

Функция $f(x, y) = x^2 + y^2$ на множестве $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ (рис. 3.14) имеет глобальный минимум в точке $(0, 0)$, являющейся точкой строгого локального минимума, а глобальный максимум достигается в граничных точках $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, 1)$, $(-2, -1)$. Он равен 5.

Функция $z = x^2 - y^2$ в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$ имеет глобальный максимум в точках $(1, 0)$, $(-1, 0)$, он равен 1, а глобальный минимум равен -1. Достигается он в точках $(0, -1)$, $(0, 1)$ (рис. 3.15).

4. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Разбиение плоской фигуры. Множество точек D плоскости $\mathbf{R}^2$ назовем плоской *фигурой.* *Диаметром* фигуры D называется точная верхняя граница множества расстояний между произвольными парами точек, принадлежащих D (рис. 4.1):

$$\operatorname{diam} D = \sup\left\{d(M_1, M_2) \mid M_1 \in D,\ M_2 \in D\right\}.$$

Фигура D ограничена, если $\operatorname{diam} D < +\infty$. Ограниченная фигура имеет *площадь* ($\operatorname{mes} D$) в том и только том случае, если ее граница может быть заключена в многоугольник с площадью, которая не больше сколь угодно малого, наперед заданного положительного числа (рис. 4.2). В этом случае говорят, что граница D имеет нулевую площадь, а фигура *квадрируема.* Площадь квадрируемой фигуры D равна точной верхней границе площадей всевозможных многоугольников, содержащихся в этой фигуре.

Фигура, ограниченная кусочно-гладким контуром, квадрируема.

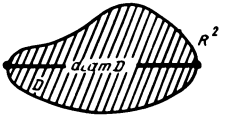


Рис. 4.1

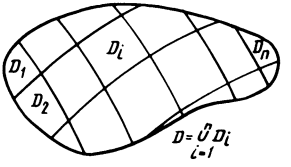


Рис. 4.3

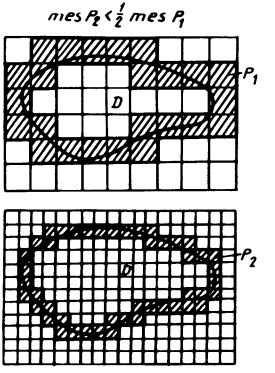


Рис. 4.2

Совокупность подмножеств $\{D_1, D_2, ..., D_n\}$, $D_i \subset D$, $i = \overline{1,n}$, назовем *разбиением* D, если $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$ и пересечение $D_i \cap D_j$, $i \neq j$, не содержит внутренних точек D_i, $i = \overline{1,n}$ (рис. 4.3), $\sum_{i=1}^{n} \text{mes} D_i = \text{mes } D$. *Диаметром разбиения* называется величина $\rho = \max_i \{\text{diam} D_i\}$.

Определение двойного интеграла. Предполагая, что на квадрируемой фигуре D задана ограниченная функ-

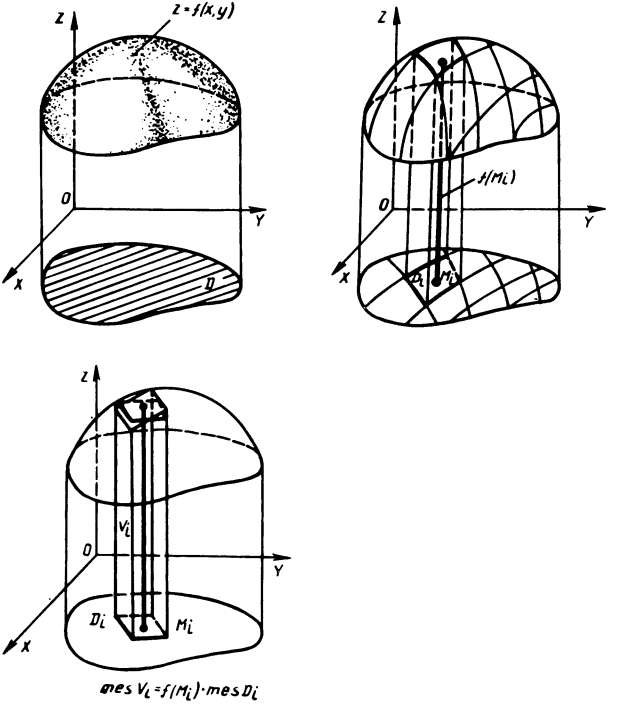


Рис. 4.4

ция $f, f: D \to \mathbf{R}$, составим интегральную сумму σ, произвольно разбив D на части и выбрав в каждой D_i произвольную точку M_i, $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\operatorname{mes} D_i$.

Произведение $|f(M_i)|\operatorname{mes} D_i$ определяет объем цилиндра с основанием D_i и высотой $|f(M_i)|$ (рис.4.4).

Определение. *Двойным интегралом функции f по множеству $D \subset \mathbf{R}^2$ называется предел I интегральной суммы σ при стремлении диаметра разбиения к нулю, если он существует, не зависит от способа разбиения D и выбора точек M_i:*

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\operatorname{mes} D_i = \iint_D f(x, y)\, d\sigma,$$

т. е.

$$I = \iint_D f(x, y)\, d\sigma \Leftrightarrow \begin{array}{l} \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \{D_i\}, \forall M_i \in D_i; \\ \rho\{D_i\} < \delta \Rightarrow |\sigma - I| < \epsilon. \end{array}$$

В качестве разбиения D на части можно взять разбиение сетью прямых, параллельных координатным осям (рис. 4.5). Обозначается интеграл следующим образом:

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma = \iint_D f(x, y)\, dx dy = \iint_D f(M)\, d\sigma.$$

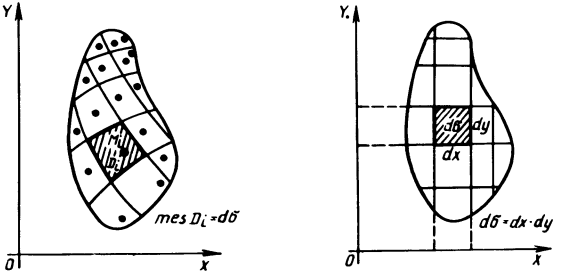


Рис. 4.5

Необходимым условием интегрируемости функции f по квадрируемому множеству D является ее ограниченность на D.

В противном случае за счет выбора точек M_i, $i=\overline{1,n}$, можно сделать так, что интегральная сумма при данном разбиении будет больше любого наперед заданного числа, т. е. множество интегральных сумм не ограничено, т. е. не имеет конечного предела. Например, для функции $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, рассматриваемой на множестве $0 < x \leqslant a$, $0 < y \leqslant b$ (рис. 4.6), выберем произвольным образом точки M_{ij} для некоторого разбиения и будем лишь менять точку M_{11}, приближая ее к точке $(0, 0)$, фиксируя остальные. Тогда множество интегральных сумм, полученное таким образом, будет множеством неограниченным:

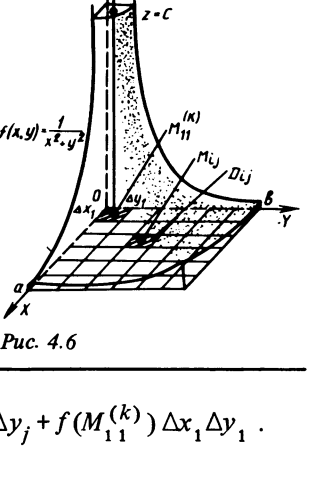


Рис. 4.6

$$\sigma_k = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j>2}}^{n} \frac{1}{x_i^2 + y_j^2} \Delta x_i \Delta y_j + f(M_{11}^{(k)}) \Delta x_1 \Delta y_1 .$$

Ограниченность функции на множестве D, являясь необходимым условием интегрируемости, не является достаточным. Например, функция

$$f(x, y) = D(x) \cdot D(y) = \begin{cases} 1, \text{если } x \text{ и } y \text{ рациональны;} \\ 0, \text{если хотя бы одна из координат точки } (x,y) \text{ иррациональна} \end{cases}$$

(функции $D(x)$ и $D(y)$ – функции Дирихле) ограничена на множестве $0 \leqslant x \leqslant 0{,}1$; $0 \leqslant y \leqslant 0{,}1$. Произведя

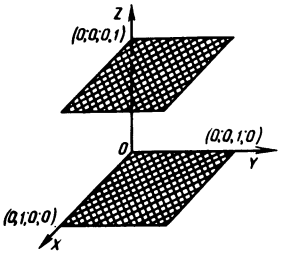


Рис. 4.7

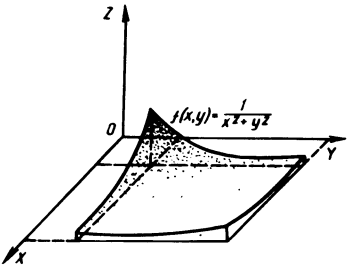


Рис. 4.8

разбиение области интегрирования на части (рис. 4.7), возьмем в качестве произвольных точек точки с рациональными координатами, тогда

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} 1\mathrm{mes}D_i = \mathrm{mes}D = 0{,}01.$$

Если хотя бы одна из координат этих точек является иррациональным числом, а таким образом точки выбрать можно для любого разбиения, то

$$\sigma_2 = \sum_{i=1}^{n} 0\mathrm{mes}D_i = 0.$$

Следовательно, последовательность интегральных сумм не может иметь предела.

Достаточные условия интегрируемости функции сформулированы в виде следующих теорем.

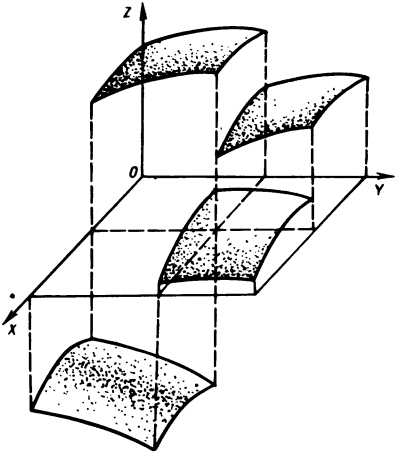


Рис. 4.9

Теорема 1. *Функция, непрерывная на квадрируемом компакте, интегрируема (рис. 4.8).*

Теорема 2. *Функция, ограниченная на квадрируемом компакте D и непрерывная во всех точках D, кроме точек множества нулевой площади, интегрируема (рис. 4.9).*

Теорема 3. *Функция f, являющаяся алгебраической суммой или произведением интегрируемых на квадрируемом множестве функций, интегрируема.*

Геометрический смысл двойного интеграла. Если

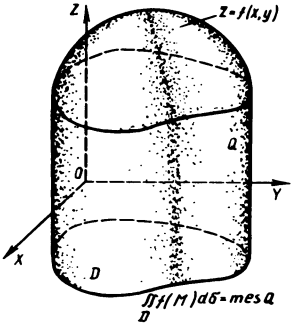


Рис. 4.10

$f(x, y) \geqslant 0 \quad \forall (x, y) \in D$, где D – квадрируемая область и f интегрируема на D, то $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$ равен объему *цилиндроида*. Его основанием служит область D. Сверху цилиндроид ограничен поверхностью $z = f(x, y)$. Боковая поверхность его есть цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна оси Oz (рис. 4.10).

Если $f(x, y) = 1 \quad \forall (x, y) \in D$, то $\iint\limits_D dx\, dy$ определит площадь D, так как в этом случае цилиндроид с основанием D ограничен сверху плоскостью $z = 1$ (рис. 4.11). Объем его численно равен площади основания.

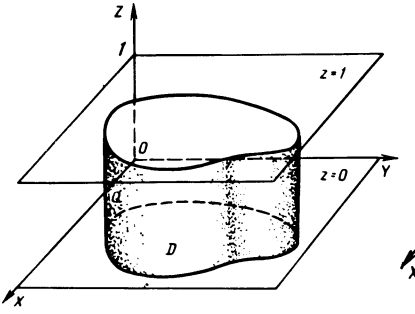


Рис. 4.11

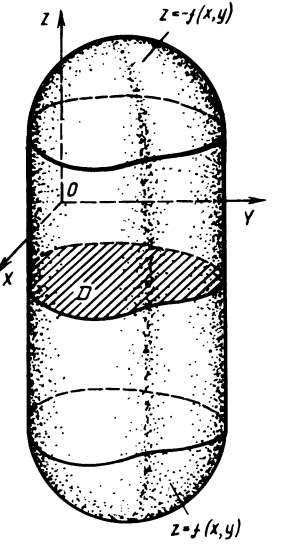


Рис. 4.12

Если $f(x, y) \leqslant 0 \quad \forall (x, y) \in D$, то $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ определит величину, модуль которой равен объему цилиндроида Q, так как объем Q в этом случае определит интеграл по D от функции $-f(x, y)$ (рис. 4.12).

4.2. СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Линейность. Если f и g интегрируемы на множестве D и $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, то функция $\alpha f + \beta g$ также интегрируема на D и

$$\iint\limits_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))\, d\sigma = \alpha \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma +$$

$$+ \beta \iint\limits_D g(x, y)\, d\sigma$$

(рис. 4.13, 4.14).

Аддитивность. Если $D = D_1 \cup D_2$, D_1 и D_2 не имеют общих внутренних точек, то из интегрируемости f по D следует интегрируемость f по D_1 и D_2, причем

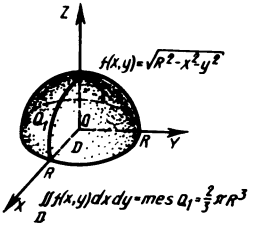
$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, d\sigma \quad (*)$$

(рис. 4.15). Верно и обратное: если f интегрируема по области D_1 и области D_2, причем $D_1 \cup D_2 = D$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то справедливо равенство $(*)$.

Монотонность. Если f и g интегрируемы на D и $f(x, y) \leqslant g(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x, y)\, d\sigma$$

(см. рис. 4.13).



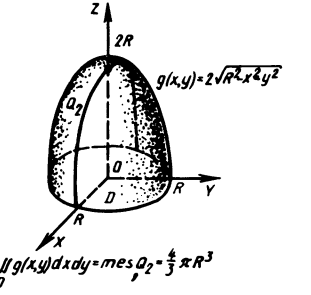
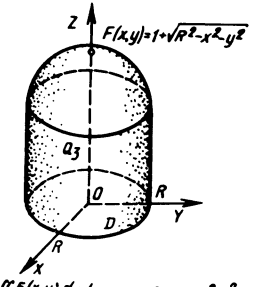


Рис. 4.13



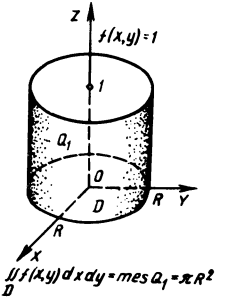
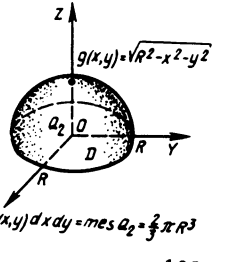


Рис. 4.14



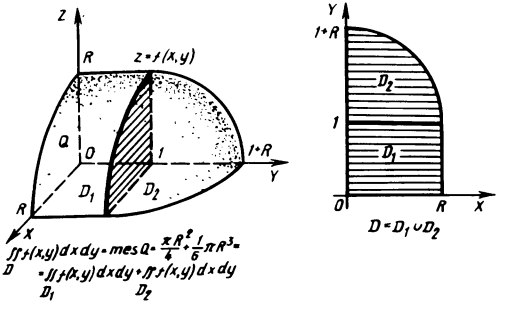


Рис. 4.15

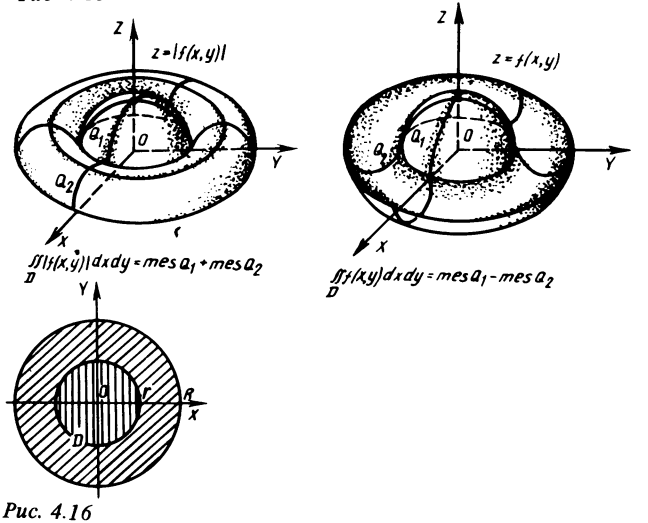


Рис. 4.16

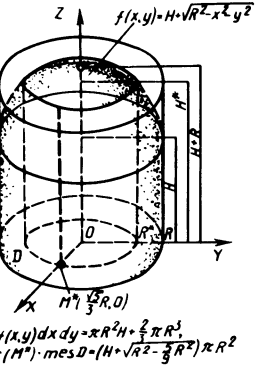


Рис. 4.17

Основная оценка. Если f интегрируема по D, то и $|f|$ интегрируема по D, причем

$$\left| \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \right| \leqslant \iint\limits_D |f(x, y)|\, d\sigma$$

(рис. 4.16).

Теорема о среднем значении. Если f непрерывна на D – квадрируемой области, то существует по крайней мере одна точка $M(x^*, y^*)$, принадлежащая D, что

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = f(x^*, y^*) \operatorname{mes} D$$

(рис. 4.17).

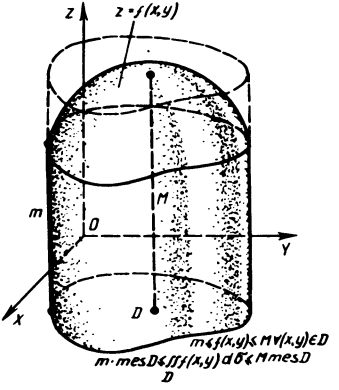


Рис. 4.18

Ограниченность. Если f интегрируема на множестве D, площадь которого S, то интеграл от f по D ограничен, причем

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \leqslant MS,$$

где m и M – нижняя и верхняя точные грани множества значений функции $f: D \to \mathbf{R}$ (рис. 4.18).

4.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Вычисление двойного интеграла в случае, когда на квадрируемой области D задана f, непрерывная неот-

рицательная функция, сводится к вычислению объема цилиндроида Q (см. рис. 4.10). Объем тела Q можно подсчитать, используя определенный интеграл следующим образом. Построим сечение тела Q плоскостью $y =$ $=$ const. Площадь поперечного сечения представляет собой функцию, зависящую от y. Она равна

$$S(y) = \int_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x, y)\, dx$$

(рис. 4.19). Объем тела равен интегралу от функции $S(y)$, т. е.

$$\operatorname{mes} Q = \int_{a}^{\beta} S(y) dy \quad \text{или} \quad \operatorname{mes} Q = \int_{a}^{\beta} dy \int_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)\, dx.$$

Аналогично можно вычислить объем тела Q, если в качестве поперечного сечения тела брать сечение его плоскостью, параллельной координатной плоскости Oyz (рис. 4.19). Тогда

$$S(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy$$

и, следовательно,

$$\operatorname{mes} Q = \int_{a}^{b} dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\, dy.$$

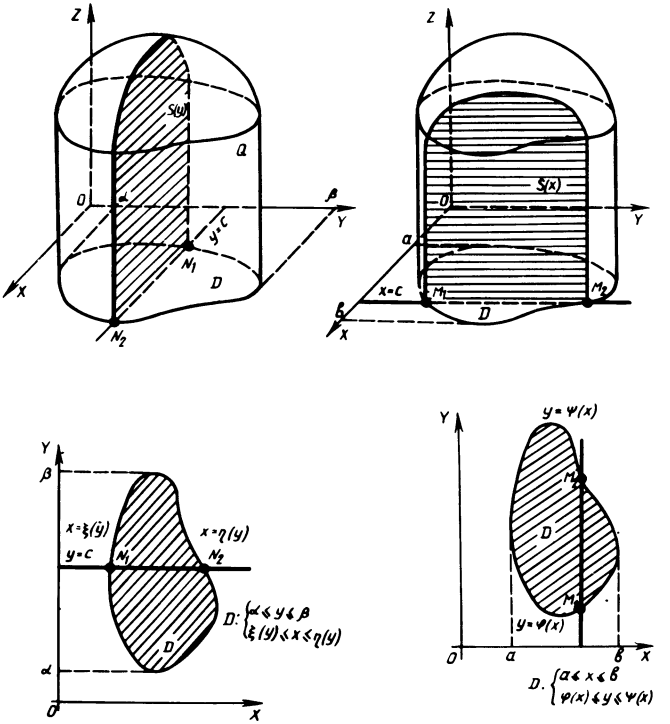

Z
S(y)
Q
O
α
β
Y
y=c
N1
D
X
N2
Z
S(x)
O
Y
a
x=c
M1
M2
b
D
X
Y
β
x=ξ(y)
x=η(y)
y=c
N1
N2
D: {α ≤ y ≤ β
ξ(y) ≤ x ≤ η(y)
D
α
O
X
Y
y=ψ(x)
M2
D
M1
y=φ(x)
O
a
b
X
D. {a ≤ x ≤ b
φ(x) ≤ y ≤ ψ(x)

Рис. 4.19

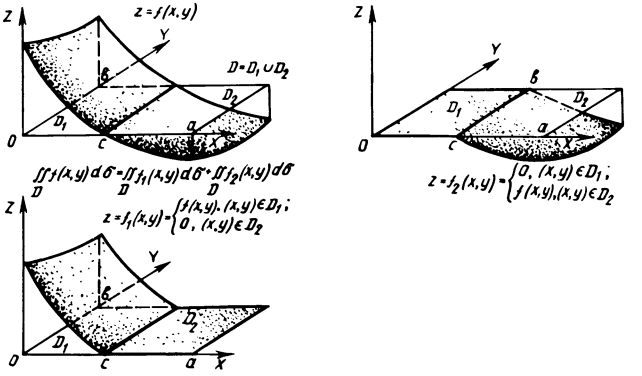


Рис. 4.20

Итак, имеет место равенство

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta dy \int\limits_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x, y)\,dx\,.$$

Полученная формула для вычисления двойного интеграла через двукратные (повторные) интегралы справедлива и в случае произвольной, интегрируемой по квадрируемой области D, функции f. Действительно, если функция f принимает на D также и отрицательные

значения, то двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$ рассматривается как сумма всех объемов, заключенных между поверхностью $z = f(x, y)$, координатной плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz, причем объемы тех частей тела, которые расположены над плоскостью $z = 0$, берутся со знаком плюс, а тех, которые расположены под плоскостью $z = 0$, берутся со знаком минус. Так, например, двойной интеграл от функции $f(x, y)$, график которой приведен на рис. 4.20, равен разности объемов двух тел:

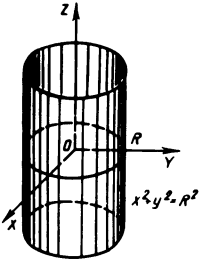
$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_D f_1(x, y)\, dx\, dy -$$

$$- \iint\limits_D (-f_2(x, y))\, dx\, dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b f_1(x, y)\, dy -$$

$$- \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b (-f_2(x, y))\, dy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^b f(x, y)\, dy .$$

Задача. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + z^2 = R^2$; $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Поверхности $x^2 + z^2 = R^2$ и $x^2 + y^2 = R^2$ – круговые цилиндры, образующая первого параллельна оси Oy, а второго – оси Oz. Тело, ограниченное этими цилиндрами, изображено на рис. 4.21. Так как оно симметрично относительно координатных плоскостей, то удобно вычислить объем его части, расположенной в первом октанте (рис. 4.22). Учитывая также сим-



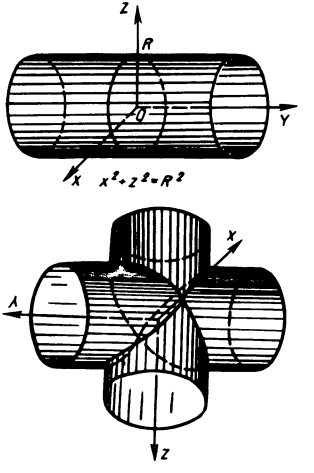
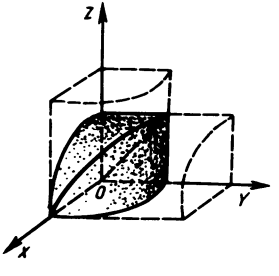


Рис. 4.21



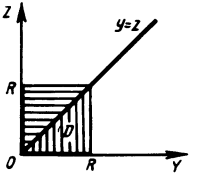


Рис. 4.22

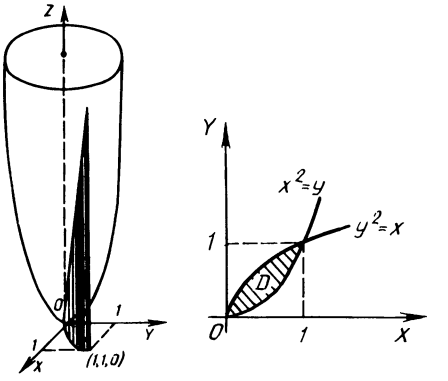


Рис. 4.23

метричность тела относительно плоскости $x = z$, найдем объем 1/16 его части:

$$\frac{1}{16} V = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2}\, dx\, dz = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^x \sqrt{R^2 - x^2}\, dz =$$

$$= \int\limits_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, x dx = \frac{R^3}{3}.$$

Задача. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $x^2 + 4y^2 = z$, плоскостью $z = 0$ и цилиндрами $y^2 = z$ и $x^2 = y$ (рис. 4.23).

Р е ш е н и е. Цилиндроид, объем которого необходимо найти, ограничен сверху поверхностью $z = x^2 + 4y^2$, поэтому

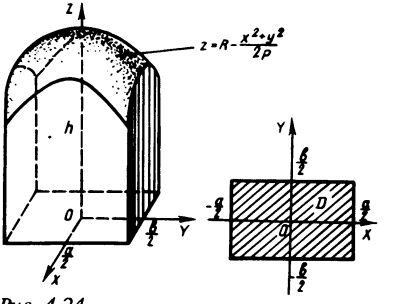


Рис. 4.24

$$V = \iint\limits_D (x^2 + 4y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + 4y^2)\,dx = \frac{3}{7}\ .$$

Задача. Прямоугольный параллелепипед срезан сверху параболоидом вращения с параметром p. Вершина параболоида расположена на оси параллелепипеда, совпадающей с осью параболоида. Вершина параболоида является точкой параболоида, максимально удаленной от основания параллелепипеда. Вычислить объем образовавшегося тела, если стороны его основания a и b, а высота h.

Р е ш е н и е. Построим тело в системе координат $Oxyz$, выбранной таким образом, что начало координат совпадает с центром основания тела, ось Oz – с осью тела, стороны параллелепипеда параллельны координатным плоскостям (рис. 4.24).

Уравнение параболоида в выбранной системе координат имеет вид $z = h - \frac{x^2 + y^2}{2p}$. Тогда

$$V = \iint_D \left(h - \frac{x^2+y^2}{2p}\right) dx\,dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(h - \frac{x^2 + y^2}{2p}\right) dy = 4\int_0^{\frac{a}{2}} \left(\frac{hb}{2} - \frac{bx^2}{4p} - \frac{b^3}{48p}\right) dx =$$

$$= abh - \frac{ab}{24}(a^2 + b^2).$$

4.4. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Коэффициент растяжения плоской фигуры. Рассмотрим в плоскостях Oxy и $O\xi\eta$ фигуры E и E_1. Допустим, что существует взаимно однозначное отображение E на E_1 с помощью преобразования $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$:

$$E = \{(x, y) \mid x = x(\xi, \eta),\ y = y(\xi, \eta),\ (\xi,\eta) \in E_1\};$$
$$E_1 = \{(\xi, \eta) \mid \xi = \xi(x, y),\ \eta = \eta(x, y),\ (x, y) \in E\},$$

где все рассматриваемые функции непрерывно дифференцируемы по своим аргументам (рис. 4.25). Треугольнику $E'_1 \subset E_1$ соответствует криволинейный треугольник E' плоскости Oxy. Координаты его вершин

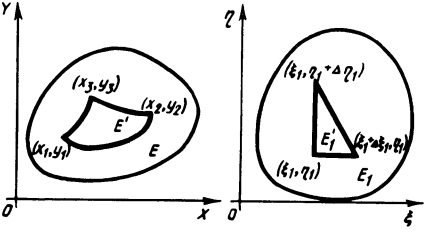


Рис. 4.25

$$x_1 = x(\xi_1, \eta_1),\ y_1 = y(\xi_1, \eta_1);$$

$$x_2 = x(\xi_1 + \Delta\xi,\ \eta_1),\ \ y_2 = y(\xi_1 + \Delta\xi,\ \eta_1);$$

$$x_3 = x(\xi_1, \eta_1 + \Delta\eta),\ \ y_3 = y(\xi_1, \eta_1 + \Delta\eta).$$

С точностью до бесконечно малых первого порядка относительно $\Delta\xi, \Delta\eta$ имеем

$$\operatorname{mes} E' = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}\Delta\xi\Delta\eta = \pm\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}\operatorname{mes} E'_1;$$

$$\operatorname{mes} E' = \pm\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix}\operatorname{mes} E'_1 + 0(\operatorname{mes} E'_1).$$

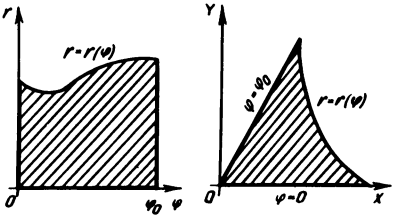


Рис. 4.26

Якобиан преобразования

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)} = \begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta \end{vmatrix},$$

взятый по модулю, является *коэффициентом растяжения* (или коэффициентом увеличения площади) фигуры в точке.

Пример. Отображение криволинейной трапеции $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0 < 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)$ в плоскости $O\varphi r$ на криволинейный сектор в плоскости Oxy с помощью полярного преобразования $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$, $0 \leqslant r \leqslant r(\varphi)$ обладает якобианом, равным r (рис. 4.26):

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Замена переменных в двойном интеграле.

Теорема. *Пусть взаимно однозначное отобра-*

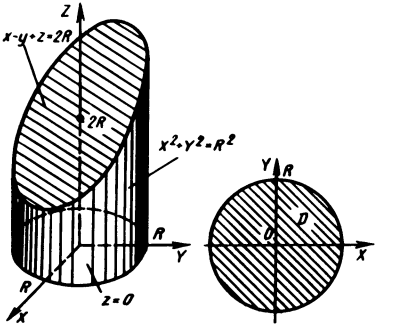


Рис. 4.27

жение $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ *множества* E_1 *на множество* E *задается непрерывно дифференцируемыми функциями* $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$, *имеющими непрерывные частные производные первого порядка, и якобиан* $\dfrac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ *всюду в* E_1 *отличен от нуля. Если* f *интегрируема на* E, *то*

$$\iint\limits_E f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{E_1} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| d\xi d\eta.$$

При переходе к полярным координатам формула замены запишется в виде

$$\iint\limits_E f(x,y)\, dx\, dy = \iint\limits_{E_1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dr.$$

Задача. Найти объем тела, ограниченного цилиндром $x^2+y^2=R^2$ и плоскостями $z=0$, $x-y+z=2R$ (рис. 4.27).

Р е ш е н и е. Проекция рассматриваемого тела на плоскость Oxy представляет собой круг с центром в начале координат радиусом R:

$$V=\iint\limits_D (2R-x+y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D'} r\,(2R-r\cos\varphi+r\sin\varphi)\,d\varphi dr=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r\,(2R-r\cos\varphi+r\sin\varphi)\,dr=\int\limits_0^{2\pi}(R^3-$$

$$-\frac{1}{3}R^3\cos\varphi+\frac{1}{3}R^3\sin\varphi)\,d\varphi=2\pi R^3\,.$$

4.5. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Масса пластины. Вычисление массы пластины, занимающей область D плоскости Oxy, если плотность распределения массы задана непрерывной функцией $\rho(x,y)$, сводится к вычислению интеграла по области D с подынтегральной функцией $\rho(x,y)$:

$$m=\iint\limits_D \rho\,(x\;y)\,dx\,dy\,.$$

Это следует из предварительного, приближенного вычисления массы пластины, для чего пластина D разбивается произвольным образом на n частей с площадями $\Delta\sigma_k$, $k=\overline{1,n}$. Массу каждого участка можно считать

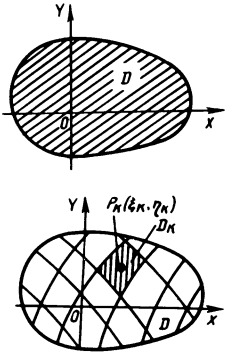


Рис. 4.28

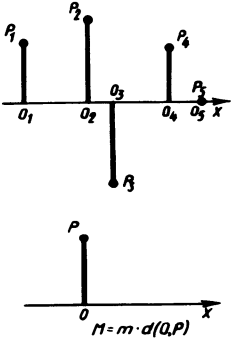


Рис. 4.29

приближенно равной $\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$, а масса всей пластины приближенно равна $\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$ (рис.4.28).

Статические моменты пластины. *Статическим моментом материальной точки массы m относительно оси называется произведение массы точки на расстояние ее от этой оси.*

Статический момент относительно оси конечной системы материальных точек P_k, $k = \overline{1, n}$, лежащих в одной плоскости с осью, равен сумме произведений масс этих точек на расстояния их от оси,причем расстояния точек, лежащих по одну сторону от оси, берутся

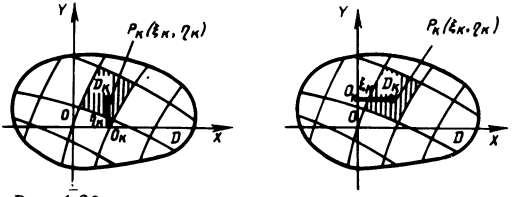


Рис. 4.30

со знаком плюс, а расстояния точек, лежащих по другую сторону, – со знаком минус. Так, момент системы материальных точек, изображенных на рис. 4.29, равен

$$M = m_1 d(O_1P_1) + m_2 d(O_2P_2) - m_3 d(O_3P_3) +$$
$$+ m_4 d(O_4P_4) + m_5 \cdot 0,$$

где m_k – масса P_k-й точки.

Для материальной пластины D, плотность распределения массы которой задается непрерывной функцией $\rho(x, y)$, статические моменты относительно координатных осей (рис. 4.30) вычисляются с помощью интегралов. Действительно, разбив D на части с площадями $\Delta\sigma_k$ и считая, что масса каждой части, равная $\rho(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k$, $k = \overline{1, n}$, сосредоточена в точке $P_k(\xi_k, \eta_k)$, а расстояние точки P_k от осей координат определяется ее координатами, приближенное значение статических моментов M_{Ox}, M_{Oy} относительно осей координат равняется следующим суммам:

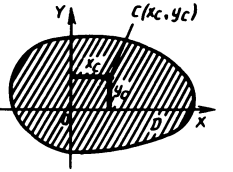


Рис. 4.31

$$M_{Ox} \approx \sum_{k=1}^{n} \eta_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k ;$$

$$M_{Oy} \approx \sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k .$$

Точное значение моментов получим, переходя к пределу в полученных выражениях, устремляя диаметр разбиения ρ к нулю:

$$M_{Ox} = \iint_D y\rho(x, y)\, d\sigma ; \quad M_{Oy} = \iint_D x\rho(x, y)\, d\sigma .$$

Координаты центра масс. Статические моменты M_{Ox}, M_{Oy} пластины легко позволяют установить положение ее *центра масс*, точку C. Центром масс называется такая точка $C\ (x_c, y_c)$, которая обладает тем свойством, что если в ней сосредоточить массу пластины, то момент этой материальной точки относительно любой оси совпадает с моментом относительно этой же оси всей пластины.

Обозначив массу пластины через m, имеем (рис. 4.31):

$$mx_c = M_{Oy}\ ;\quad my_c = M_{Ox}\,.$$

Отсюда:

$$x_c = \frac{M_{Oy}}{m} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,d\sigma}\ ;$$

$$y_c = \frac{M_{Ox}}{m} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,d\sigma}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,d\sigma}\ .$$

Момент инерции пластины. Моментом инерции материальной точки массы m относительно оси называется произведение ее массы на квадрат расстояния точки от оси. Момент инерции системы материальных точек равен сумме моментов инерций, составляющих эту систему масс (рис. 4.32).

Разбив материальную пластину D с плотностью распределения массы, заданной непрерывной функцией $\rho(x, y)$ (рис. 4.33), на части и заменив ее системой материальных точек с массами $m_k = \rho(\xi_k\ ,\ \eta_k)\,\Delta\sigma_k, k = \overline{1, n}$, определим приближенно моменты инерций материальной пластины относительно осей Ox и Oy и относительно начала координат O:

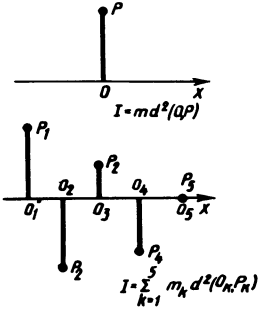


Рис. 4.32

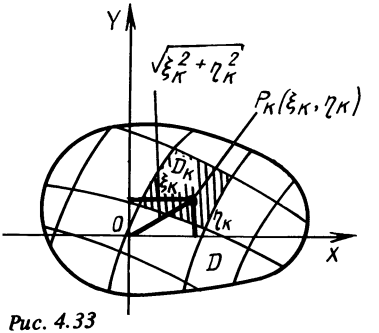


Рис. 4.33

$$I_{Ox} \approx \sum_{k=1}^{n} \eta_k^2 \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k ;$$

$$I_{Oy} \approx \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k ;$$

$$I_O \approx \sum_{k=1}^{n} (\xi_k^2 + \eta_k^2) \rho(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k .$$

Переходя к пределу, устремляя диаметр разбиения к нулю, получаем для моментов инерции материальной пластины D точные формулы:

$$I_{Ox} = \iint_D y^2 \rho(x, y) d\sigma ; \quad I_{Oy} = \iint_D x^2 \rho(x, y) d\sigma ;$$

$$I_O = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) d\sigma .$$

Задача. Фигура D представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную кривой $y = f(x)$, отрезком оси Ox и двумя прямыми $x = a, x = b$. Плотность распределения массы равна единице. Определить статические моменты относительно осей координат и центр масс этой фигуры (рис. 4.34).

Решение.

$$M_{Ox} = \iint\limits_D y\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_0^{f(x)} y\,dy = \frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx;$$

$$M_{Oy} = \iint\limits_D x\,dx\,dy = \int_a^b x\,dx \int_0^{f(x)} dy = \int_a^b x f(x)\,dx;$$

$$m = \iint\limits_D dx\,dy = \int_a^b f(x)\,dx;$$

$$x_c = \frac{\int_a^b x f(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}; \quad y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Если формулу, определяющую ординату центра масс, переписать в виде

$$2\pi y_c \int_a^b f(x)\,dx = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx,$$

то правая ее часть выражает объем тела V, полученно-

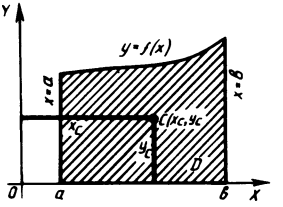


Рис. 4.34

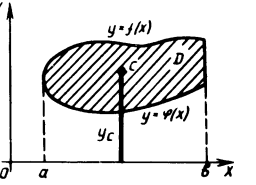


Рис. 4.35

го вращением плоской фигуры D около оси Ox. Левая часть этой формулы представляет произведение длины окружности, описанной точкой C при вращении ее вокруг оси Ox, на площадь этой фигуры. Полученное соотношение можно сформулировать следующим образом.

Объем тела вращения плоской фигуры D вокруг не пересекающей ее оси равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром масс фигуры: $V = 2\pi y_c S$.

Полученная теорема называется *теоремой Гульдина.* Она остается справедливой, если фигура D ограничена и снизу и сверху кривыми (рис. 4.35) $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$. В этом случае

$$y_c = \frac{\iint\limits_D y\,dx\,dy}{\iint\limits_D dx\,dy} \quad \text{или} \quad y_c S = \frac{1}{2}\int_a^b (f^2(x) - \varphi^2(x))dx,$$

где S – площадь D. Отсюда следует

$$2\pi y_c S = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \pi \int_a^b \varphi^2(x)\,dx .$$

Правая часть формулы представляет разность объемов тел вращения, полученных от вращения вокруг оси Ox криволинейных трапеций (рис. 4.36), что и определит объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры D.

Приведем несколько задач, решение которых основано на понятии двойного интеграла.

Задача 1. Найти статические моменты и координаты центра масс фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = x$, если масса равномерно распределена по фигуре.

Р е ш е н и е. Так как масса равномерно распределена по D (рис. 4.37), то плотность распределения массы постоянна, т. е. $\rho(x, y) = c$:

$$M_{Ox} = \iint_D cy\,dx\,dy = c\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} y\,dy = \frac{c}{15};$$

$$M_{Oy} = \iint_D cx\,dx\,dy = c\int_0^1 x\,dx \int_{x^2}^{x} dy = \frac{c}{12};$$

$$m = \iint_D c\,dx\,dy = c\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy = \frac{c}{6};$$

$$x_c = \frac{M_{Oy}}{m} = \frac{1}{2}; \quad y_c = \frac{M_{Ox}}{m} = \frac{2}{5}.$$

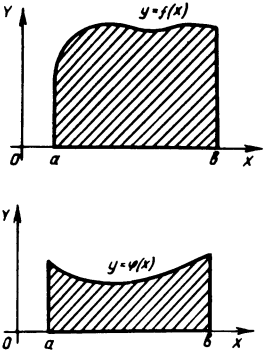


Рис. 4.36

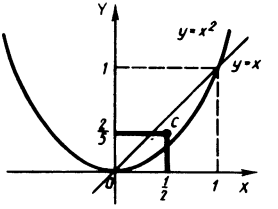


Рис. 4.37

Задача 2. Определить объем *тела Вивиани,* т. е. тела, ограниченного сферой радиусом R и круговым цилиндром, диаметр основания которого равен радиусу сферы и одна из образующих проходит через диаметр сферы.

Р е ш е н и е. Поверхности, ограничивающие тело в системе координат $Oxyz$, задаются уравнениями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $(x - \frac{R}{2})^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, если центр сферы совпадает с началом координат (рис. 4.38). Учитывая симметричность тела относительно плоскостей Oxy и Oxz, вычисляем объем его части, расположенной в первом октанте:

$$\frac{1}{4}V = \iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} r\sqrt{R^2 - r^2}\, dr = \frac{R^3}{18}(3\pi - 4);$$

$$V = \frac{2R^3(3\pi - 4)}{9}.$$

Задача 3. Доказать, что если фигура D с равномерно распределенной на ней массой имеет ось симметрии, то центр масс ее лежит на этой оси.

Р е ш е н и е. Пусть ось ординат Oy является осью симметрии D (рис. 4.39). В этом случае функции $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, задающие границу, являются четными, т. е. для любых $x \in [-a, a]$ выполняются равенства $f(-x) = f(x)$, $\varphi(-x) = \varphi(x)$ и

$$x_c = \frac{1}{S}\iint\limits_D x dxdy = \frac{1}{S}\int\limits_{-a}^{a} x dx \int\limits_{\varphi(x)}^{f(x)} dy =$$

$$= \frac{1}{S}\int\limits_{-a}^{a} x(f(x) - \varphi(x))\, dx = 0,$$

где $S = \iint\limits_D dxdy$. Функции $x f(x)$ и $x\ \varphi(x)$ нечетные и интегралы от этих функций по симметричному промежутку равны нулю. Следовательно, $x_c = 0$.

Задача 4. Найти объем тора, образованного вращением вокруг оси Ox круга, ограниченного окружно-

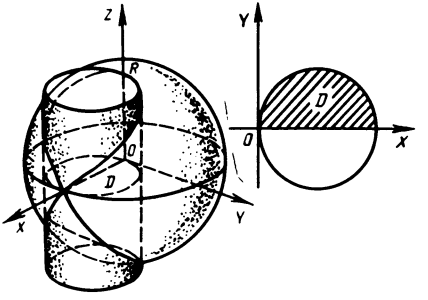


Рис. 4.38

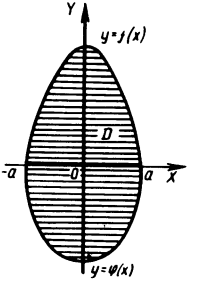


Рис. 4.39

стью с центром в точке (a, b) радиусом R, $R \geqslant b$ (рис. 4.40, 4.41).

Р е ш е н и е. Используя теорему Гульдина, имеем $2\pi y_c S = V$, где S – площадь круга; V – объем тела вращения, т. е. объем тора; y_c – ордината центра масс. Как известно, $S = \pi R^2$, центр масс круга в случае равномерно распределенной массы находится в центре круга. Следовательно, $x_c = a$, $y_c = b$. Итак, $2\pi b \cdot \pi R^2 = V$, т. е. $V = 2\pi^2 bR^2$. Если $b = R$, то $V = 2\pi^2 R^3$.

Задача 5. Найти объем тела, ограниченного поверхностью, полученной при вращении линии $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = 1$.

Р е ш е н и е. Площадь фигуры, ограниченной $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, и $y = 0$, равна $S = \int_0^{\pi} \sin x dx$, т. е. $S = 2$.

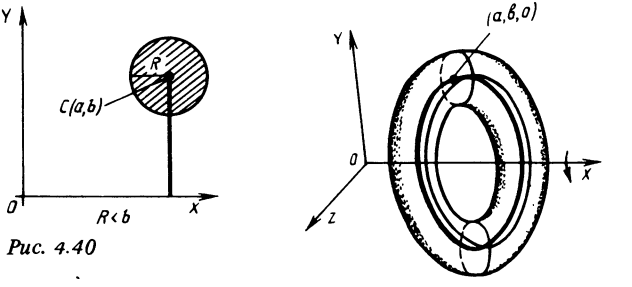


Рис. 4.40

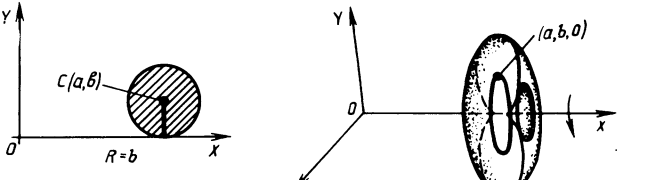


Рис. 4.41

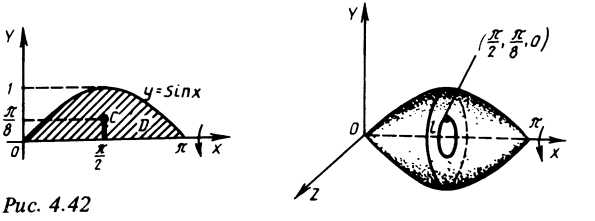


Рис. 4.42

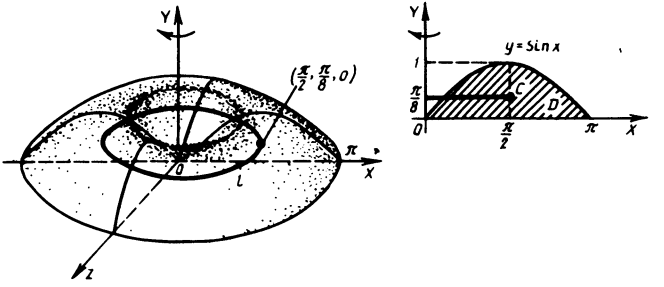


Рис. 4.43

Учитывая, что фигура симметрична относительно прямой $x = \pi/2$, имеем, что центр масс C лежит на прямой $x = \pi/2$. Ордината центра масс определится следующим образом:

$$M_{Ox} = \iint\limits_D y dx dy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} y dy = \frac{\pi}{4}\ ;\ y_c = \frac{\pi}{8}\ .$$

а) Используя теорему Гульдина, определяем объем тела, изображенного на рис. 4.42:

$$2\pi \frac{\pi}{8} 2 = V\ ;\quad V = \frac{\pi^2}{2}\ .$$

б) При вращении вокруг оси Oy получим тело, изображенное на рис. 4.43. Его объем определится из уравнения $2\pi x_c S = V$, где $x_c = \pi/2$; $V = 2\pi^2$.

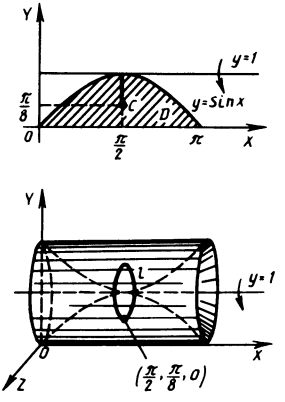


Рис. 4.44

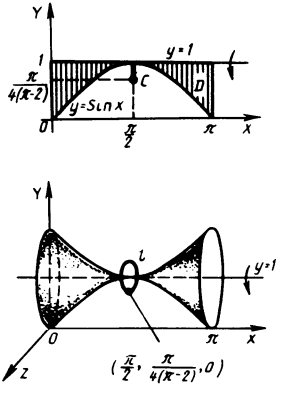


Рис. 4.45

в) При вращении вокруг прямой $y = 1$ (рис. 4.44) центр масс C опишет окружность l с центром в точке $(\pi/2, 1)$ радиусом $1 - y_c$. По теореме Гульдина $2\pi(1 - y_c)S = V$, где $y_c = \pi/8$. Следовательно, $V = \frac{\pi}{2}(8 - \pi)$.

Задача 6. Найти объем тела, полученного вращением вокруг прямой $y = 1$ фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$; $y = 1$ (рис. 4.45).

Решение. Фигура D симметрична относительно прямой $x = \pi/2$, поэтому центр масс C ее лежит на этой прямой, т. е. $x_c = \pi/2$. Определим y_c:

$$M_{Ox} = \iint\limits_D y dx dy = \int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_{\sin x}^{1} y dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= \frac{\pi}{4}\ ;\ y_c = \frac{\pi}{4(\pi - 2)}\ ,$$

так как $m = \pi - 2$.

Применяя теорему Гульдина, имеем

$$V = 2\pi(1 - y_c) S\ ,\quad V = \frac{\pi}{2}(3\pi - 8).$$

Задача 7. Найти объем тела, полученного при вращении фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $0 \leqslant x < +\infty$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = 1$.

Решение. Считая D материальной пластиной с равномерно распределенной массой, плотность распределения $\rho(x, y) = 1$, определяем координаты центра масс C. Заметим, что в данном случае фигура D неограниченная, поэтому при вычислении интегралов по ней используется операция предельного перехода:

$$M_{Ox} = \iint\limits_D y dx dy = \lim_{A \to \infty} \int\limits_0^A dx \int\limits_0^{e^{-x}} y dy = \frac{1}{4}\ ;$$

$$M_{Oy} = \iint\limits_D x dx dy = \lim_{A \to \infty} \int\limits_0^A x dx \int\limits_0^{e^{-x}} dy = 1;$$

$$m = \iint\limits_D dx dy = \lim_{A \to \infty} \int\limits_0^A dx \int\limits_0^{e^{-x}} dy = 1;\ S = m\ ;$$

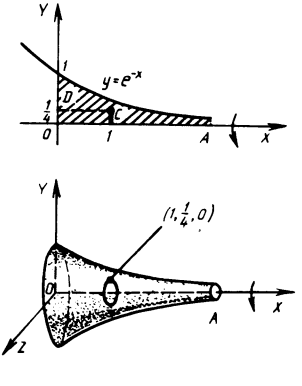


Рис. 4.46

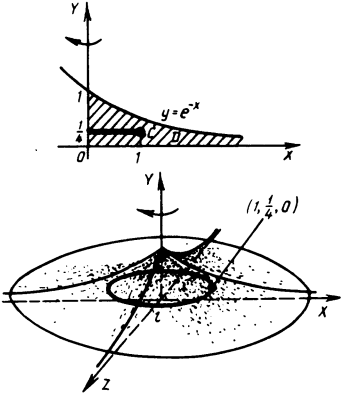


Рис. 4.47

$$x_c = \frac{M_{Oy}}{m} = 1; \quad y_c = \frac{M_{Ox}}{m} = \frac{1}{4}.$$

а) Применение теоремы Гульдина дает (рис. 4.46) следующее:

$$V = 2\pi y_c S; \quad V = \pi/2.$$

б) В случае тела, изображенного на рис. 4.47, имеем:

$$V = 2\pi x_c S; \quad V = 2\pi.$$

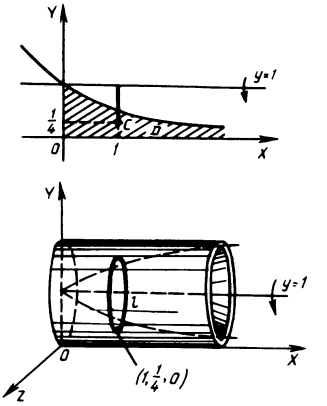


Рис. 4.48

в) Тело, полученное при вращении D вокруг прямой $y = 1$, изображено на рис. 4.48:

$$V = 2\pi(1 - y_c)S\,; \quad V = 3\pi/2\,.$$

5. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

5 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПО ДУГЕ

Кусочно-гладкие кривые. *Кривой или линией называется множество точек пространства* $\mathbf{R}^3$, *являющихся образом промежутка при некотором непрерывном отображении.*

Например, образом отрезка $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ при отображении

$$x = a\cos t\ ;\ y = a\sin t\ ;\ z = bt$$

является винтовая линия (рис. 5.1). Изображение кривой при значениях t, принадлежащих множеству $[0, +\infty[$, приведено на рис. 5.2.

Непрерывное отображение промежутка в $\mathbf{R}^2$ определяет плоскую кривую. Например, окружность (рис. 5.3) задается как непрерывное отображение $x = a\cos t$; $y = a\sin t$ промежутка $[0,2\pi[$ на $\mathbf{R}^2$. При задании плоской кривой в качестве параметра часто рассматривается переменная x.

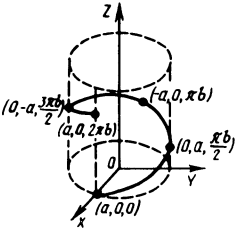


Рис. 5.1

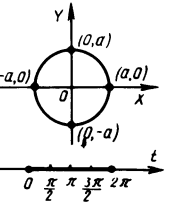


Рис. 5.3

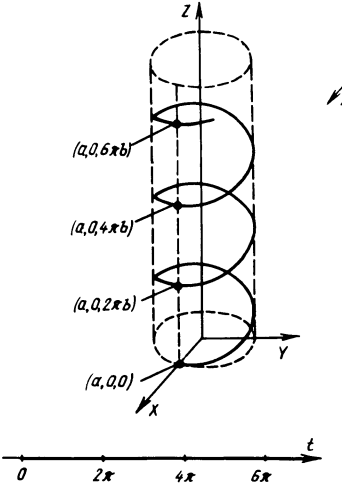


Рис. 5.2

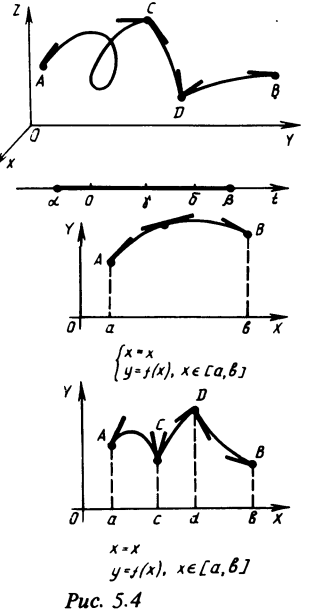


Рис. 5.4

Пространственную кривую L:

$$L = \{(x, y, z)/x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [\alpha, \beta]\};$$

$$A = (x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha));\ B = (x(\beta), y(\beta), z(\beta))$$

с началом в точке A и концом в точке B назовем кусочно-гладкой, если отображение, ее задающее, непрерывно дифференцируемо на конечном числе отрезков, на которые разбит $[\alpha, \beta]$, причем на концах этих отрезков существуют односторонние производные. Производные $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ не равны одновременно нулю (рис. 5.4).

Криволинейный интеграл по дуге. Пусть в точках кусочно-гладкой кривой $L \subset \mathbf{R}^3$ задана функция $f(M) = f(x, y, z)$, $M \in L$:

$$L: \{(x, y, z) \mid x = x(t),\ y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Разобьем отрезок $[\alpha, \beta]$ оси Ot произвольным образом на части $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$, $i = \overline{1, n}$, причем $]\alpha_{i-1}, \alpha_i[\cap]\alpha_{j-1}, \alpha_j[= \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{n} [\alpha_{i-1}, \alpha_i] = [\alpha, \beta]$ (рис. 5.5). Обозначим $\alpha_i - \alpha_{i-1} = \Delta t_i$. Значению $t = \alpha_i$ соответствует точка на кривой L $A_i = (x(\alpha_i), y(\alpha_i), z(\alpha_i))$. Длину дуги $A_{i-1}A_i$ обозначим ΔS_i. Очевидно, что если δ – диаметр разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ – устремить к нулю, то и $\Delta S_i \to 0$ $\forall i = \overline{1, n}$. Выбрав на каждом участке $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ произвольную точку α_i^*,

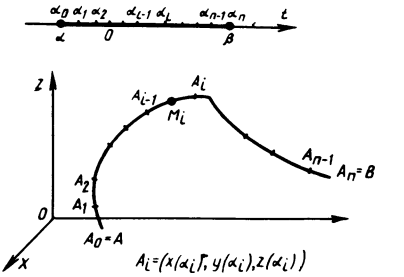


Рис. 5.5

которой на кривой отвечает точка $M_i(x(\alpha_i^*),\ y(\alpha_i^*)\ ,\ z(\alpha_i^*))$, составим интегральную сумму функции f вдоль L:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\alpha_i^*),\ y(\alpha_i^*)\ ,\ z(\alpha_i^*))\Delta S_i.$$

В случае плоской линии

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x(\alpha_i^*),\ y(\alpha_i^*))\,\Delta S_i\,.$$

Криволинейным интегралом по дуге называется предел интегральной суммы σ при стремлении δ к нулю, если он существует. Отметим, что он не зависит от способа разбиения отрезка $[\alpha, \beta]$ на части и выбора промежуточных точек α_i^*, $i = \overline{1,n}$:

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta S_i = \int_{AB} f(x, y, z)dS\,.$$

Сведение криволинейного интеграла по дуге к определенному интегралу. Если кривая L задается параметрически:

$$x = x(S)\ ,\ y = y(S)\ ,\ z = z(S),\ S \in [\,0, l\,]\,,$$

где в качестве параметра используется *естественный параметр*, S – длина дуги AM, $A = (x(0), y(0),\ z(0))$; $B = (x(l),\ y(l),\ z(l))$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dS = \int\limits_0^l f(x(S),\ y(S),\ z(S))\,dS.$$

Для кусочно-гладкой кривой AB, заданной в произвольной параметризации $x = x(t)$; $y = y(t)$; $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ (рис. 5.6),

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dS = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

в предположении, что интеграл в правой части существует.

Из определения криволинейного интеграла по дуге следует, что:

1. $\int\limits_{AB} f(M)\,dS = \int\limits_{BA} f(M)\,dS$.

2. Если $f(M) = 1\ \forall M \in AB$, то $\int\limits_{AB} dS = l$, где l – длина дуги.

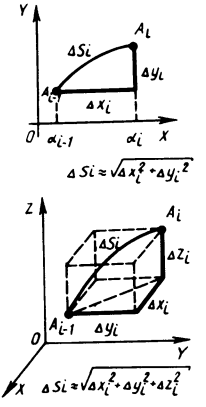


Рис. 5.6

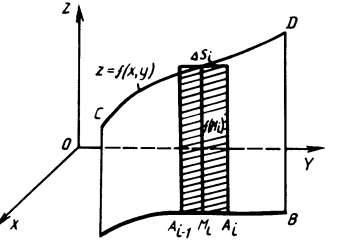


Рис. 5.7

3. Пусть L – плоская кривая, принадлежащая плоскости Oxy (рис. 5.7). Непрерывная функция, заданная на кривой L $f(x, y)$, определит кривую пространства $\mathbf{R}^3$, ортогональная проекция которой на Oxy совпадает с L. Произведение $f(M_i)\,\Delta S_i$ приближенно определит площадь куска цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси Oz, и направляющей L.

Точное значение площади цилиндрической поверхности, ограниченной кривыми L и CD,

$$CD = \left\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), \quad (x, y) \in AB\right\}$$

получим, вычислив интеграл $\int\limits_{AB} f(x, y)\, dS$.

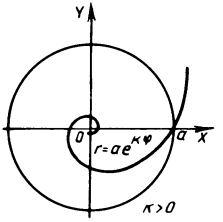


Рис. 5.8

Задача. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} xdS$, где AB – часть логарифмической спирали $r = ae^{k\varphi}$, находящаяся внутри окружности $r = a$ (рис. 5.8).

Р е ш е н и е. Часть спирали, расположенная внутри окружности $r = a$, задается формулой $r = ae^{k\varphi}$, $-\infty < \varphi \leqslant 0$, r, φ – полярные координаты. Переходя к параметрическому заданию кривой

$$x = ae^{k\varphi}\cos\varphi\,;\quad y = ae^{k\varphi}\sin\varphi\,,\ \varphi\in\,]\,-\infty\,,0]\,,$$

получим

$$\int\limits_{AB} xdS = \int\limits_{-\infty}^{0} ae^{k\varphi}\cos\varphi\sqrt{k^2+1}\ d\varphi = \frac{2ka^2\sqrt{k^2+1}}{4k^2+1},$$

учитывая, что $\lim\limits_{\varphi\to-\infty} e^{2k\varphi}(2k\cos\varphi+\sin\varphi) = 0$, так как $e^{2k\varphi}\to 0$, а

$$|\,2k\cos\varphi + \sin\varphi\,| \leqslant 2.k + 1\,.$$

5.2. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Масса кривой. Вычисление массы материальной кривой AB с плотностью распределения, заданной непрерывной функцией $\rho(x, y, z)$, сводится к нахождению криволинейного интеграла по дуге AB с подынтегральной функцией $\rho(x, y, z)$:

$$m = \int_{AB} \rho(x, y, z)\, ds .$$

Это следует из предварительного , приближенного, вычисления массы кривой. Масса участка кривой A_{i-1}, A_i приближенно равна $\rho(M_i)\Delta s_i$, где M_i — произвольная точка дуги A_{i-1}, A_i, а ΔS_i — ее длина. Разбив дугу AB на участки A_{i-1}, A_i, $i = \overline{1, n}$, имеем $m \approx$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \rho(M_i)\Delta s_i .$$

Статический момент кривой. Вопросы, связанные с массами, непрерывно распределенными вдоль кривой, приводят к криволинейным интегралам по дуге.

Статические моменты материальной кривой AB с плотностью распределения $\rho(x, y, z)$ относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам:

$$M_{Oxy} = \int_{AB} z\rho(x, y, z)\, dS ; \quad M_{Oxz} = \int_{AB} y\rho(x, y, z) dS;$$

$$M_{Oyz} = \int_{AB} x\rho(x, y, z)\, dS .$$

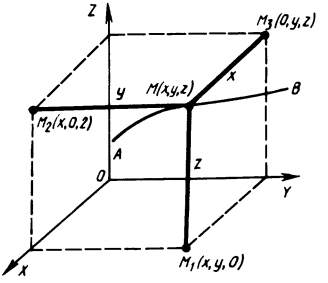


Рис. 5.9

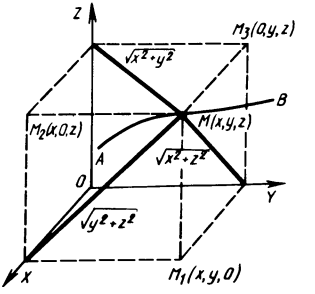


Рис. 5.10

Координаты центра масс определяются по формулам:

$$x_c = \frac{M_{Oyz}}{m}; \quad y_c = \frac{M_{Oxz}}{m}; \quad z_c = \frac{M_{Oxy}}{m}.$$

Момент инерции кривой. Моменты инерции относительно координатных осей вычисляются по формулам:

$$I_x = \int_{AB} (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds;$$

$$I_y = \int_{AB} (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\, ds;$$

$$I_z = \int_{AB} (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\, ds.$$

Для вывода рассматриваемых формул необходимо уметь определять расстояние точек пространства до

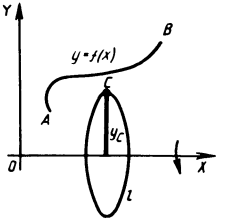


Рис. 5.11

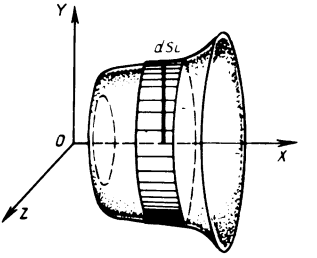


Рис. 5.12

координатных осей (рис. 5.9) и координатных плоскостей (рис. 5.10).

Теорема Гульдина. В случае плоской кривой AB с равномерно распределенной на ней массой $\rho(x, y, z) = \text{const}$ координаты центра масс задаются формулами:

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x ds}{\int\limits_{AB} ds}; \quad y_c = \frac{\int\limits_{AB} y ds}{\int\limits_{AB} ds}.$$

Учитывая, что $\int\limits_{AB} ds = l$, имеем $2\pi y_c l = \int\limits_{AB} 2\pi y ds$.

Левая часть полученной формулы представляет собой произведение длины дуги AB на длину окружности, описанной центром масс C около оси Ox. Правая часть задает площадь поверхности, полученной от вращения кривой AB вокруг не пересекающей ее оси Ox, так как

выражение $2\pi y_i ds_i$ определит площадь боковой поверхности цилиндра, высота которого ds_i (рис. 5.11, 5.12).

Итак, справедлива *теорема Гульдина*:

Величина площади поверхности, полученной от вращения кривой вокруг некоторой не пересекающей ее оси, равна длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром масс C кривой: $P = 2\pi y_c l$.

Учитывая, что для однородной материальной кривой с плотностью распределения $\rho(x, y) = 1$ масса кривой m численно равна длине кривой l, имеем $P = 2\pi \frac{M_x}{m} l$, т. е. $P = 2\pi M_x$.

Теорема Гульдина может быть использована для определения площади поверхности тела вращения в случае, когда известно положение центра масс кривой.

Задача 1. Найти длину кривой $x = a\cos t$; $y = a\sin t$; $z = bt$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Решение.

$$l = \int_L dS = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Задача 2. Найти площадь боковой поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = Rx$, ограниченного плоскостью $z = 0$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (рис. 5.13).

Решение. Пересечение сферы с цилиндром явля-

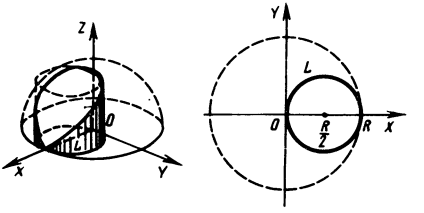


Рис. 5.13

ется кривой, называемой кривой Вивиани:

$$z^2 = R^2 - x^2 - y^2; \quad x^2 + y^2 = Rx.$$

Учитывая симметрию поверхностей относительно плоскости Oxz, определим площадь части поверхности, лежащей в первом октанте: $0{,}5P = \int\limits_L z ds$.

Кривую L запишем в параметрической форме:

$$x = \frac{R}{2}(1 + \cos t), \; y = \frac{R}{2}\sin t, \; 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}P = \int\limits_L \sqrt{R^2 - Rx}\, dS = \int\limits_0^{\pi} \frac{R^2}{2\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos t}\, dt =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{\pi} \sin \frac{t}{2} dt = R^2.$$

Задача 3. Найти массу дуги кривой $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$, от точки $O(0, 0, 0)$ до точки $A(a, a, a\sqrt{2})$, если

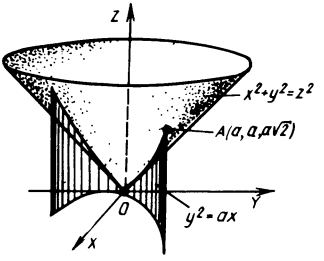


Рис. 5.14

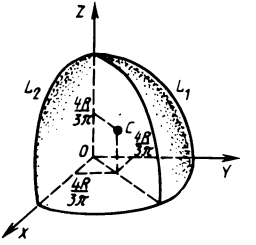


Рис. 5.15

линейная плотность ее в (x, y, z) равна z (рис. 5.14).

Решение.

$$m = \int\limits_{OA} z ds;$$

$$OA = \{(x, y, z) \mid x = x,\ y = \sqrt{ax},\ z = \sqrt{x^2 + ax},$$

$$0 \leqslant x \leqslant a\};$$

$$m = \frac{1}{2}\int\limits_0^a \sqrt{8x^2 + 9ax + 2a^2}\, dx = \frac{a^2}{256\sqrt{2}}\left(100\sqrt{38} - \right.$$

$$\left. - 72 + 17\ln\frac{25 + 4\sqrt{38}}{17}\right).$$

Задача 4. Найти центр масс контура однородного сферического треугольника $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ (рис. 5.15).

Решение. Так как рассматриваемая поверхность

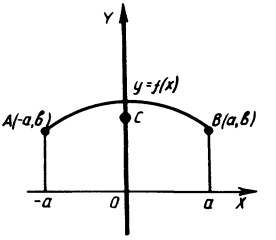


Рис. 5.16

однородна и симметрична относительно всех биссектральных плоскостей, то $x_c = y_c = z_c$. Предварительно определим статический момент контура треугольника относительно плоскости Oxy; $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$:

$$L_1 = \{(0, y, z) \mid y = R\cos t,\ z = R\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2\};$$

$$L_2 = \{(x, 0, z) \mid z = R\cos t,\ x = R\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2\};$$

$$L_3 = \{(x, y, 0) \mid x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi/2\};$$

$$M_{Oxy} = \int_L z dS = \int_0^{\pi/2} R\sin t\, dt + \int_0^{\pi/2} R^2 \cos t = 2R^2 .$$

Массу контура определим, зная длину окружности R: $m = 3\frac{2\pi R}{4} = \frac{3\pi R}{4}$. Тогда $x_c = y_c = \frac{4R}{3\pi}$.

Задача 5. Доказать, что если плоская кривая L с

равномерно распределенной массой имеет ось симметрии, то центр масс лежит на этой оси.

Р е ш е н и е. Пусть кривая L симметрична относительно оси Oy (рис. 5.16). Покажем, что $x_c = 0$, для чего определим статический момент кривой относительно оси Oy:

$$M_{Oy} = \int\limits_{AB} x dS = \int\limits_{-a}^{a} x\sqrt{1+f'^2(x)}\ dx .$$

Заметим, что если функция $f(x)$ – четная на $[-a, a]$, т. е. $f(-x) = f(x)$, то справедливо соотношение $-f'(-x) = f'(x)$, т. е. $f'(x)$ – нечетная функция.

Статический момент определится как интеграл от нечетной функции:

$$M_{Oy} = \int\limits_{-a}^{a} x\sqrt{1+f'^2(x)}\ dx = 0; \quad x_c = \frac{M_{Oy}}{m} = 0 .$$

Задача 6. Найти площадь поверхности тора, образованной вращением вокруг оси Oy окружности с центром в точке (a, b) радиусом R, $R \geqslant a$ (рис. 5.17).

Р е ш е н и е. Будем считать окружность материальной кривой с равномерно распределенной массой $\rho(x, y) = 1$. Так как кривая симметрична относительно прямых $x = a$ и $y = b$, центр масс расположен в центре окружности $x_c = a$, $y_c = b$.

Площадь поверхности тора определим с помощью теоремы Гульдина: $P = 2\pi x_c l$. Так как $l = 2\pi R$, то $P = 4\pi^2 aR$.

Если $R = a$, то $P = 4\pi^2 a^2$.

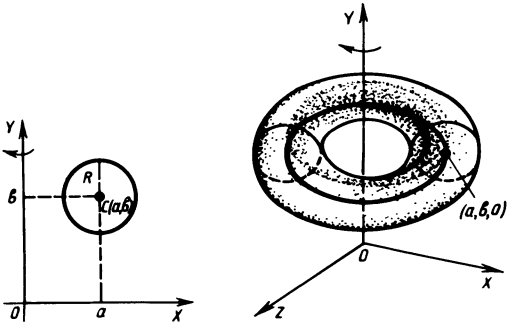


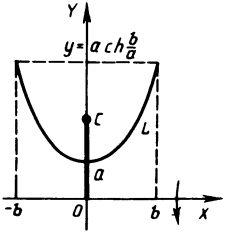
Рис. 5.17

Задача 7. Найти площадь поверхности, образованной вращением цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$, $x \in [-b,\ b]$: а) вокруг оси Ox; б) вокруг оси Oy; в) вокруг прямой $y = x$.

Решение. Так как кривая симметрична относительно оси Oy, центр масс ее лежит на этой оси, т.е. $x_c = 0$. Масса кривой численно равна длине ее:

$$m = \int\limits_L dS = 2\int\limits_0^b \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2\,\frac{x}{a}}\,dx =$$

$$= 2\int\limits_0^b \mathrm{ch}\,\frac{x}{2}\,dx = 2a\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a}\ .$$



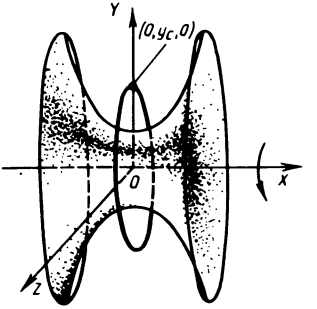


Рис. 5.18

а) Определим статический момент относительно оси Ox (рис. 5.18):

$$M_{Ox} = \int_L y dS = a \int_{-b}^{b} \mathrm{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a}{2} \int_{-b}^{b} (1 + \mathrm{ch} 2\frac{x}{a}) dx =$$

$$= \frac{a}{2} (2b + a \,\mathrm{sh} \frac{2b}{a}); \quad y_c = \frac{2b + a \,\mathrm{sh} \frac{2b}{a}}{4 \,\mathrm{sh} \frac{b}{a}} .$$

Используя теорему Гульдина, имеем

$$P = \pi a (2b + a \,\mathrm{sh} \frac{2b}{a}).$$

б) Рассматривая вращение вокруг оси Oy, в каче-

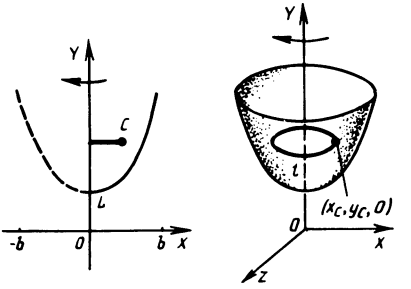


Рис. 5.19

стве L берем кривую $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$, $0 \leqslant x \leqslant b$. В этом случае ось вращения не пересекает кривую L (рис.5.19). Находим статический момент ее относительно оси Oy:

$$M_{Oy} = \int\limits_L x dS = \int\limits_0^b x \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2 \frac{x}{a}}\, dx = \int\limits_0^b x\,\mathrm{ch}\frac{x}{a} dx =$$

$$= ab\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a} - a^2\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a} + a^2\,,\ P = 2\pi\left(ab\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{a} - a^2\,\mathrm{ch}\,\frac{b}{a} + \right.$$

$$\left. + a^2\right)\,.$$

в) Вращение вокруг оси $y = x$ показано на рис.5.20. Расстояние центра масс C до оси вращения $y = x$ вычислим как катет прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой:

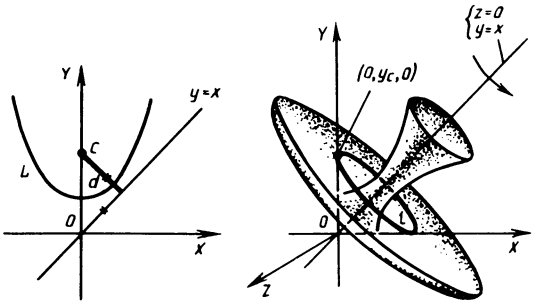


Рис. 5.20

$$d = \frac{2b + a\,\mathrm{sh}\,\dfrac{2b}{a}}{\sqrt{2}\;4\,\mathrm{sh}\,\dfrac{b}{a}}; \quad P = \frac{\pi a}{\sqrt{2}}\left(2b + a\,\mathrm{sh}\,\frac{2b}{a}\right).$$

5.3. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО КООРДИНАТАМ

Определение криволинейного интеграла по координатам. Пусть в точках кусочно-гладкой кривой $L \subset \mathbf{R}^3$ задана функция $f(M) = f(x, y, z)$, $M \in L$:

$$L = \{(x, y, z) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$$

$$t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Произведя разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ произвольным образом точками t_k, $k = \overline{1, n}$; $\delta = \max \Delta t_k$, вычислим

значения $x_k = x(t_k), y_k = y(t_k)$, $z_k = z(t_k)$. Тогда $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$; $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$; $z_k - z_{k-1} = \Delta z_k$.

Построим интегральные суммы функции f по x, y и z вдоль L:

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k;$$

$$\sigma_y = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k;$$

$$\sigma_z = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k,$$

где (ξ_k, η_k, ζ_k) – произвольно выбранная точка, лежащая на дуге $M_{k-1}, M_k, M_{k-1} \sim t_{k-1}, M_k \sim t_k$, $k = \overline{1, n}$ (рис. 5.21).

Если существуют пределы $\lim\limits_{\delta \to 0} \sigma_x$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \sigma_y$, $\lim\limits_{\delta \to 0} \sigma_z$, *не зависящие ни от способа разбиения кривой, ни от выбора точек, то их называют криволинейными интегралами по координатам и обозначают соответственно*

$$\int_L f(M)\,dx, \quad \int_L f(M)\,dy, \quad \int_L f(M)\,dz.$$

Если на L заданы функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, интегрируемые вдоль L, то выражение

$$\int_L P(x, y, z)\,dx + \int_L Q(x, y, z)\,dy + \int_L R(x, y, z)\,dz$$

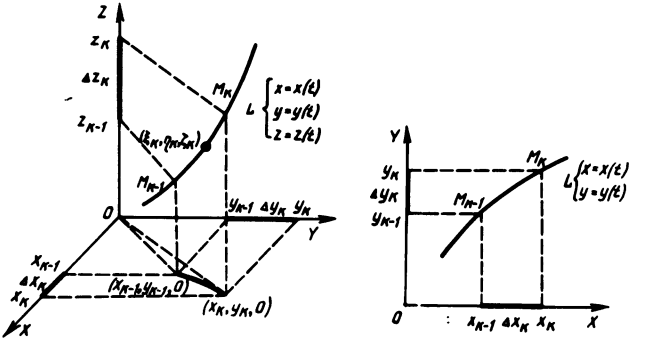


Рис. 5.21

Рис. 5.22

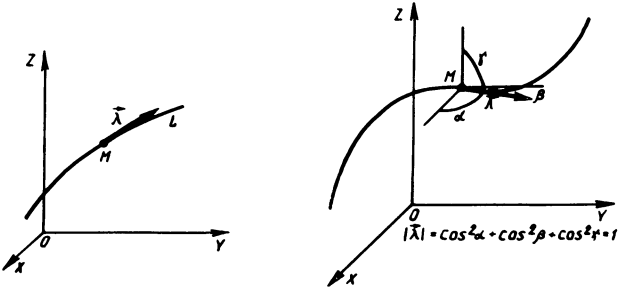


Рис. 5.23

называют *составным интегралом* или криволинейным *интегралом общего вида* и обозначают так:

$$\int_L P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)\,dz .$$

Связь между криволинейными интегралами по дуге и по координатам. Направление от точки A к точке B на кусочно-гладкой кривой L задается направлением касательных в каждой точке кривой, где касательная существует. В точках кривой L, в которых существуют лишь односторонние касательные, рассматриваются для определенности правые полукасательные (рис. 5.22). Единичный вектор $\vec{\lambda}$ положительной полукасательной в точке M кривой L зададим с помощью направляющих косинусов (рис. 5.23):

$$\vec{\lambda} = \cos\alpha(M)\,\vec{e}_1 + \cos\beta(M)\,\vec{e}_2 + \cos\gamma(M)\,\vec{e}_3 ;$$

$$\cos\alpha(M) = \frac{x'(t)}{\rho(t)}; \quad \cos\beta(M) = \frac{y'(t)}{\rho(t)};$$

$$\cos\gamma(M) = \frac{z'(t)}{\rho(t)}; \quad \rho^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t).$$

Теорема. Если L – кусочно-гладкая кривая и

$L : \{(x, y, z) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),$
$t \in [\alpha, \beta]\}$, то:

$$\int_L P(x, y, z)\, dx = \int_L P(x, y, z) \cos\alpha dS;$$

$$\int_L Q(x, y, z)\, dy = \int_L Q(x, y, z) \cos\beta dS;$$

$$\int_L R(x, y, z) dz = \int_L R(x, y, z) \cos\gamma\, dS$$

в предположении, что интегралы в правых частях равенств существуют.

Учитывая возможность сведения криволинейного интеграла по дуге к определенному интегралу для кусочно-гладкой кривой L, имеем

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z) dz =$$

$$= \int_a^\beta (P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t),$$

$$z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t))\, dt.$$

5.4. УСЛОВИЕ ЭЙЛЕРА

Формула Грина. Рассмотрим плоское множество $E \subset \mathbf{R}^2$:

$$E = \left\{ (x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \quad \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \right\},$$

причем функции $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ предполагаем непрерывными во всех точках $x \in [a, b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода.

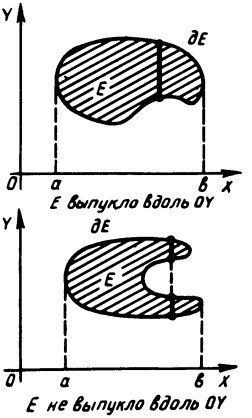


Рис. 5.24

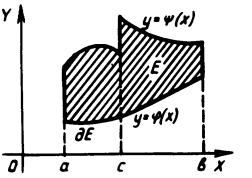


Рис. 5.25

Множество E называется элементарным вдоль оси Ox, если E выпукло вдоль Oy и проектируется на отрезок $[a, b]$ *оси Ox (рис. 5.24).*

Если E элементарно вдоль Oy, то граница его ∂E состоит из конечного числа дуг, определяемых функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, и конечного числа вертикальных отрезков (рис. 5.25). Пример множества, элементарного вдоль оси Ox, приведен на рис. 5.26.

Множество E называется составным, если существует разбиение его на конечное число множеств, элементарных вдоль Ox или Oy (рис. 5.27).

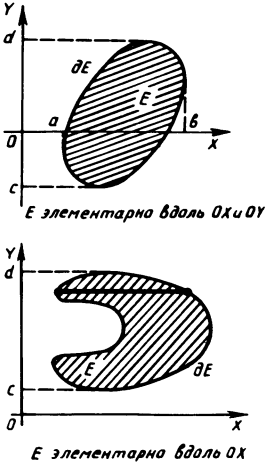


Рис. 5.26

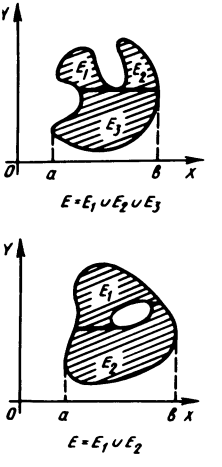


Рис. 5.27

Теорема Грина. *Если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы на составном множестве E вплоть до границы этого множества, то*

$$\int_{\partial E} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_E \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\right) dx\,dy\ ,$$

где направление на границе ∂E множества E выбирает-

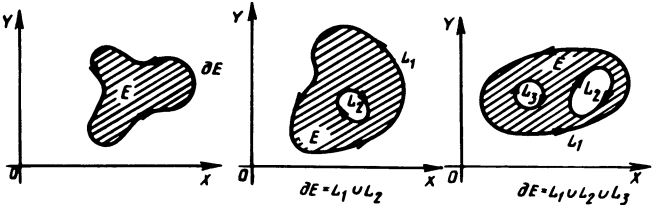


Рис. 5.28

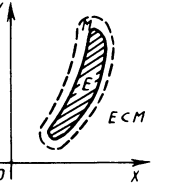


Рис. 5.29

ся всегда так, чтобы при обходе в указанном направлении область E оставалась слева (рис. 5.28).

Напомним, что функция *непрерывно дифференцируема вплоть до границы*, если она непрерывно дифференцируема на некотором множестве M, подмножеством которого является E (рис. 5.29).

Выражение площади плоской области через криволинейные интегралы. Подберем функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ на E таким образом, чтобы выражение $\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 1 \quad \forall\ (x, y) \in E$, тогда на осно-

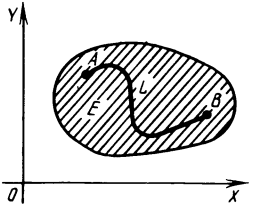


Рис. 5.30

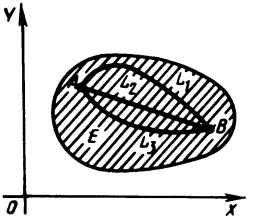


Рис. 5.31

вании формулы Грина

$$\text{mes}E = \int\limits_{\partial E} P(x, y)\,\partial x + Q(x, y)\,dy .$$

В частности, при $P = -y$, $Q = x$ имеем

$$\text{mes}E = \frac{1}{2} \int\limits_{\partial E} xdy - ydx .$$

Независимость криволинейного интеграла от формы кривой. Предположим, что кривая L с началом в точке A и концом в точке B принадлежит E, где E – односвязная область, и рассмотрим составной интеграл $I = \int\limits_L P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ (рис. 5.30) для функций $P(x, y)$, $Q(x, y)$, непрерывных на E и непрерывно дифференцируемых на E вплоть до границы. Если при любых A и B, принадлежащих E, величина I полностью определяется заданием начала A и концом B, то

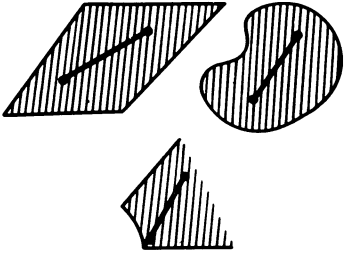


Рис. 5.32

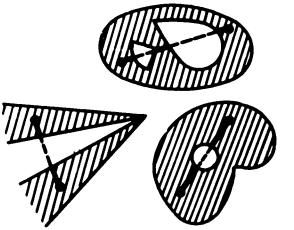


Рис. 5.33

говорят, что интеграл не зависит от кривой интегрирования (рис. 5.31).

Примеры *односвязных* и *многосвязных* областей приведены соответственно на рис. 5.32, 5.33.

Критерий независимости криволинейного интеграла по координатам. *Интеграл* $I = \int\limits_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ *не зависит от кривой* $L \subset E$, *соединяющей точки* A *и* B *односвязной области* E, *если для непрерывно дифференцируемых в* E *функций* $P(x, y)$ *и* $Q(x, y)$ *выполняется условие Эйлера*

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \qquad \forall\ (x, y) \in E.$$

Заметим, что односвязность области E является существенным условием теоремы. Например, $\forall (x,y) \in E$

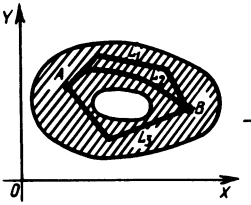


Рис. 5.34

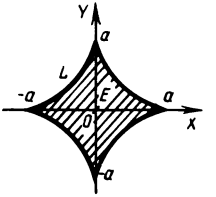


Рис. 5.35

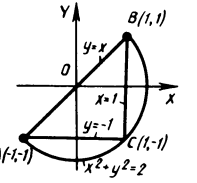


Рис. 5.36

(рис. 5.34) выполняется условие $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Однако если

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L_2} P dx + Q dy,$$

то не обязательно

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L_3} P dx + Q dy.$$

Задача 1. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ (рис.5.35).

Решение.

$$\text{mes}E = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

Задача 2. Вычислить интеграл $I = \int_{AB} (x+y)\, dx + (x-y)\, dy$, если $A(-1,-1)$, $B(1,1)$: а) вдоль прямой

$y = x$; б) вдоль ломаной ACB, где $C(1, -1)$; в) вдоль расположенной в полуплоскости $y \leqslant x$ (рис. 5.36) дуги окружности $x^2 + y^2 = 2$.

Решение. а) $I = \int\limits_{AB} (x + y)\,dx + (x - y)\,dy =$

$= \int\limits_{-1}^{1} 2x dx = 0;$

б) $I = \int\limits_{-1}^{1} (x - 1)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} (1 - y)\,dy = 0;$

в) уравнение рассматриваемой полуокружности запишем в параметрическом виде: $x = \sqrt{2}\cos\varphi$; $y = \sqrt{2}\sin\varphi$, $-\frac{5}{4}\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Тогда $I = \int\limits_{-5/4\pi}^{\pi/4} (\cos 2\varphi -$

$- \sin 2\varphi) d\varphi = 0.$

Интеграл от точки A до точки B в случаях интегрирования вдоль прямой, ломаной, окружности равен одному и тому же числу. Это не случайно, так как подынтегральные функции $P = x + y$, $Q = x - y$ удовлетворяют условию независимости $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$.

Задача 3. Вычислить интеграл $I = \int\limits_{(0,-4)}^{(1,0)} \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2}$:

а) вдоль прямой, соединяющей точки $A(0, -1)$ и $B(1,0)$; б) вдоль ломаной ACB, где $C(1,-1)$; в) вдоль дуги

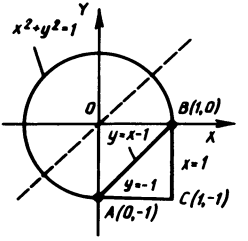


Рис. 5.37

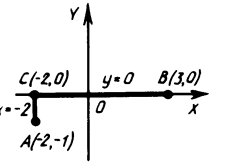


Рис. 5.38

окружности $x^2 + y^2 = 1$, расположенной в полуплоскости $y > x - 1$ (рис. 5.37).

Решение. а) $I = \int\limits_0^1 dx = 1;$

б) $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int\limits_{-1}^0 \frac{dy}{(1-y)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;$

в) дугу окружности запишем в параметрической форме:

$$x = \cos\varphi\ ;\ \ y = \sin\varphi,\ \ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{3}{2}\pi\ ;$$

$$I = \int\limits_0^{3/2\pi} \frac{d\varphi}{(\cos\varphi - \sin\varphi)} = -1.$$

Для подынтегральных функций данной задачи $P = -\dfrac{y}{(x-y)^2}$; $Q = \dfrac{x}{(x-y)^2}$ условие независимости выполнено во всех точках плоскости Oxy, за исключением точек прямой $y = x$, в которых функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ не существуют:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x+y}{(x-y)^3}.$$

Следовательно, равенство интегралов вдоль прямой и ломаной обусловлено.

Задача 4. Вычислить $I = \int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$.

Р е ш е н и е. Подынтегральные функции $P = x^4 + 4xy^3$ и $Q = 6x^2y^2 - 5y^4$ на плоскости $\mathbf{R}^2$ удовлетворяют условию независимости $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2$, поэтому интеграл не зависит от кривой интегрирования. Возьмем в качестве кривой ломаную ACB, где $C(-2, 0)$, звенья которой параллельны осям координат (рис. 5.38):

$$I = \int\limits_{-1}^{0} (24y^2 - 5y^4)\,dy + \int\limits_{-2}^{3} x^4\,dx = 62.$$

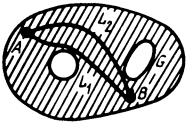


Рис. 5.39

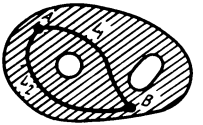


Рис. 5.40

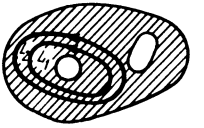


Рис. 5.41

Вычисление криволинейного интеграла в случае многосвязной области. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условию $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в многосвязной области (рис. 5.39). Для кривой L_1, соединяющей точки A и B, принадлежащие G, рассмотрим интеграл

$$I = \int_{L_1} Pdx + Qdy.$$

Пусть L_2 – кривая, соединяющая точки A и B, получена из L_1 непрерывной деформацией, в ходе которой не затрагиваются точки, не принадлежащие G. Тогда эту деформацию можно рассматривать в некоторой односвязной подобласти области G и по теореме независимости $\int_{L_2} Pdx + Qdy = I$, причем $\int_{AL_1B} Pdx+Qdy+$ $+ \int_{BL_2A} Pdx + Qdy = 0$. Если рассматривать кривую L_2, расположенную таким образом, что подобласть облас-

ти G с границей $L_1 \cup L_2$ не является односвязной (как, например, на рис. 5.40), то в этом случае интеграл по L_2 не обязательно равен интегралу по L_1.

В случае, показанном на рис. 5.41, интеграл по L_2 равен интегралу по L_1, так как интеграл по границе односвязной подобласти, ограниченной $L_1 \cup L_2$, равен нулю.

5.5. РАБОТА ПЕРЕМЕННОЙ СИЛЫ

Работа постоянной силы $\vec{F}$ по перемещению материальной точки M в точку N равна произведению $A = FS\cos(\widehat{\vec{F}, \vec{S}})$, если $\vec{S} = \overrightarrow{MN}$, а $(\widehat{\vec{F}, \vec{S}})$ – угол между направлением силы и направлением перемещения точки. Таким образом, $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$ (рис. 5.42).

При непрерывном изменении силы $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ и непрямолинейном пути перемещения для вычисления работы прибегают сначала к ее приближенному определению. Пусть под действием силы

$$\vec{F} = P(x, y, z)\,\vec{e}_1 + Q(x, y, z)\,\vec{e}_2 + R(x, y, z)\,\vec{e}_3,$$

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – орты координатных осей. Материальная точка перемещается вдоль линии L:

$$L = \{(x, y, z) \mid x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$$

от точки A до точки B. Разбивая произвольным образом дугу AB (рис. 5.43) на n частей и считая на каждой частичной дуге силу постоянной, определяем работу A приближенно суммой

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}(M_i)\ ,\ \vec{\tau}(M_i))\,\Delta S_i\ ,$$

где M_i – произвольная точка, принадлежащая i-й дуге; $\vec{\tau}(M_i)$–единичный вектор касательной к L в точке M_i; ΔS_i – длина частичной дуги.

Переходя к пределу, устремляя диаметр разбиения к нулю, получаем

$$A = \int_{AB} (\vec{F}(M),\ \vec{\tau}(M))\,dS\,.$$

Обратим внимание на тот факт, что если $(\widehat{\vec{F},\vec{\tau}}) = \pi/2\ \ \forall M \in L$, то $A = 0$, т. е. сила, перпендикулярная к направлению перемещения, работы не производит.

Если действующую на точку силу $\vec{F}$ разложить на две составляющие: по касательной к направлению перемещения и направлению, перпендикулярному к нему (рис. 5.44), то работу совершает лишь касательная составляющая $F_\tau = F\cos(\widehat{\vec{F},\vec{\tau}})$.

Тогда

$$A = \int_{AB} F\cos(\widehat{\vec{F},\vec{\tau}})\,dS = \int_{AB} F_\tau(M)\,dS\,.$$

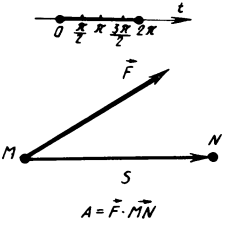


Рис. 5.42

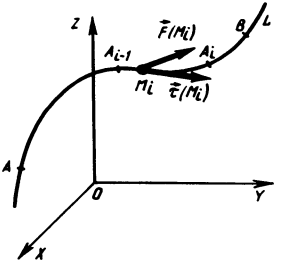


Рис. 5.43

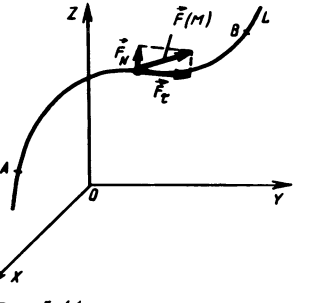


Рис. 5.44

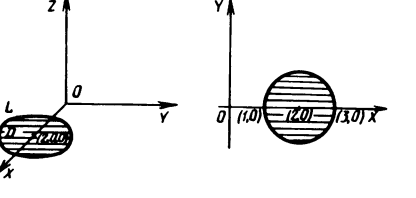


Рис. 5.45

Учитывая, что

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{e}_1 + Q(M)\vec{e}_2 + R(M)\vec{e}_3 ,$$

а

$$\vec{\tau}(M) = \cos\alpha(M)\vec{e}_1 + \cos\beta(M)\vec{e}_2 + \cos\gamma(M)\vec{e}_3 ,$$

где α, β, γ – углы, образованные вектором касательной $\vec{\tau}(M)$ с осями координат, имеем

$$A = \int\limits_{AB} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS .$$

Используя теорему о связи криволинейных интегралов по дуге и координатам, запишем работу переменной силы в виде интеграла

$$A = \int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz.$$

Задача. Найти работу вектора $\vec{F} = -y\vec{e}_1 + x\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ (c – постоянная) вдоль замкнутого контура L, где $L : \{(x, y, z) \mid (x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ (рис.5.45).

Р е ш е н и е. Применяя формулу Грина и учитывая, что площадь круга равна πR^2 (в нашем случае $R=1$), имеем

$$A = \oint\limits_L (-ydx + xdy + cdz) = \int\limits_l (-y\,dx + x\,dy) =$$

$$= \iint\limits_D 2dxdy = 2\pi.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Список обозначений 6
1. *Криволинейные координаты* 9
1.1. Криволинейные координаты на плоскости 9
1.2. Криволинейные координаты в пространстве 32
2. *Непрерывность и дифференцируемость отображений* . 43
2.1. Топология плоскости 43
2.2. Функции двух переменных и их графики 51
2.3. Непрерывные функции 55
2.4 Дифференцируемые функции 65
2.5. Производные и дифференциалы высших порядков 75
3. *Глобальные свойства непрерывных функций* 79
3.1. Непрерывные на множестве функции 79
3.2. Экстремум 84
4. *Двойной интеграл* 94
4.1. Определение двойного интеграла 94
4.2. Свойства двойного интеграла 104
4.3. Вычисление двойного интеграла 108
4.4. Замена переменных в двойном интеграле. 116
4.5. Механические приложения двойного интеграла . . 120
5. *Криволинейные интегралы* 138
5.1. Определение криволинейного интеграла по дуге . 138
5.2. Механические приложения 145
5.3. Криволинейный интеграл по координатам 156
5.4. Условие Эйлера. 160
5.5. Работа переменной силы 171

Юрий Станиславович Богданов,
Нина Васильевна Пыжкова,
Людмила Павловна Черенкова

НАЧАЛА АНАЛИЗА ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ В НАГЛЯДНОМ ИЗЛОЖЕНИИ

Зав. редакцией С.Ю. Липец
Редактор С.С. Голод
Мл. редактор В.М. Кушилевич
Худож. редактор Ю.С. Сергачев
Техн. редактор Л.И. Счисленок
Корректор Л.А. Еркович
Оператор А.И. Маль

ИБ № 2136

Подписано в печать 28.04.87. Формат 60x90 1/32. Бумага офсет. Офсет. печать. Усл. печ. л. 5,5. Усл. кр.-отт. 5,69 . Уч.-изд. л. 5,22. Тираж 6800 экз. Зак. № 5346. Цена 20 к.

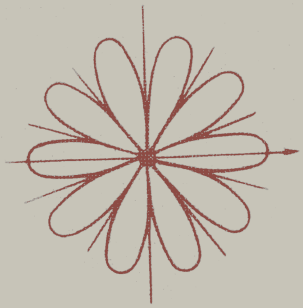
Издательство "Вышэйшая школа" Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048. Минск, проспект Машерова, 11.

Типография "Победа". 222310, Молодечно, ул. Тавлая, 11.

Отпечатано с оригинала-макета, подготовленного в издательстве "Вышэйшая школа".

Издательство "Высшая школа"

20 к

Книга содержит основные положения математического анализа функций двух переменных в их геометрической интерпретации, а также типовые примеры. Приведенный материал поможет читателю образно представить смысл таких понятий, как непрерывность в точке, дифференцируемость функций двух переменных, полнее изучить двойной и криволинейный интегралы.

Предназначена для учащихся техникумов и студентов вузов, изучающих математический анализ, а также для всех, интересующихся математикой.